МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт открытого дистанционного образования

Ю.Г. Киреева, В.В. Петров

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

Утверждено редакционно-издательским
советом университета в качестве
учебного пособия

Нижний Новгород – 2004

ББК 22.11
К 43
П 30

Киреева Ю.Г., Петров В.В. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. Интегрирование функции одной переменной (неопределенный интеграл): Учебное пособие. – Н. Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, 2004. – 68 с.
ISBN 5-87941-349-7

Пособие содержит учебный материал по курсу высшей математики (раздел «Неопределенный интеграл»). Предназначено для студентов, обучающихся в ННГАСУ по заочной форме с применением дистанционных технологий.

Для закрепления теоретических знаний, приобретения навыков в решении задач и с целью самопроверки в этом же издании представлены вопросы для самоконтроля, задачи для самостоятельного решения, контрольные задания по вариантам, итоговый проверочный тест.

ISBN 5-87941-349-7 ББК 22.11

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Определение комплексного числа

Определение. ***Комплексным числом*** z называется ***упорядоченная пара*** $\mathbf{z=(x,y)}$ ***действительных*** чисел x и y.

Алгебраическая форма записи комплексного числа: $\boxed{\mathbf{z=x+i\,y}}$,

где число $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$ называется ***мнимой единицей*** $\left(\mathbf{i}^2=-1\right)$, действительное число x - ***действительной частью комплексного числа*** $\mathbf{z}$, $\mathbf{i\cdot y}$ - ***мнимой частью*** $\mathbf{z}$, число $\mathbf{y}$ - ***коэффициентом при мнимой части*** $\mathbf{z}$.

Обозначают $\mathbf{x=\operatorname{Re} z}$, $\mathbf{y=\operatorname{Im} z}$, т.е. $\mathbf{z=\operatorname{Re} z+i\operatorname{Im} z}$.

При $\mathbf{y=0}$ имеем $\mathbf{z=x}$ – ***действительное число***. Следовательно, множество ***действительных чисел*** является ***подмножеством множества комплексных чисел***.

При $\mathbf{x=0}$ имеем $\mathbf{z=iy}$ - чисто ***мнимое число***.

Определение. Комплексные числа $\mathbf{z=x+i\,y}$ и $\mathbf{\bar{z}=x-i\,y}$, называются ***сопряженными***.

Сопряженные комплексные числа ***отличаются*** только ***знаком перед мнимой частью***.

Любому комплексному числу $\mathbf{z=x+i\,y}$ на плоскости **XOY** (плоскость (Z)) соответствует точка $\mathbf{M(x,y)}$. Комплексному числу $\mathbf{z=x+i\,y}$ можно поставить в соответствие радиус-вектор $\mathbf{OM}$.

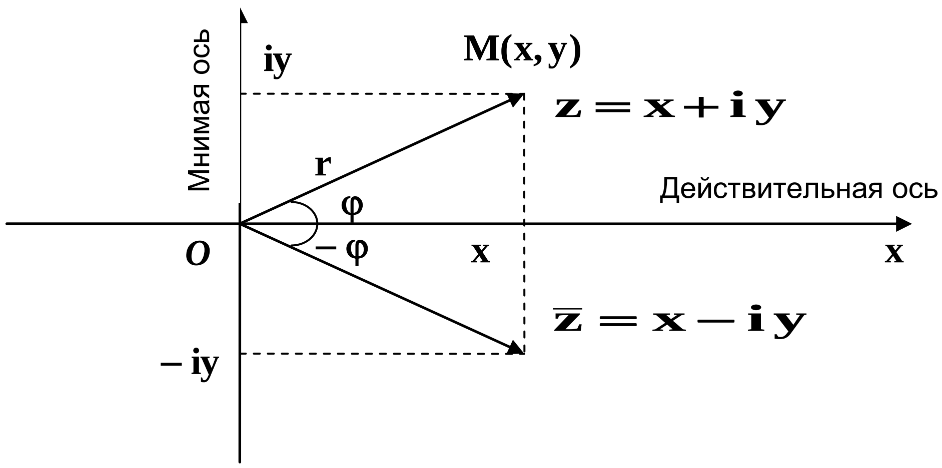


Рис. 1. Комплексная плоскость

Если $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ - полярные координаты точки $\mathbf{M(x,y)}$, т.е. $\mathbf{x = r\cos\varphi}$, $\mathbf{y = r\sin\varphi}$ (см. рис.1.), то получаем так называемую ***тригонометрическую форму*** записи комплексного числа $\mathbf{z}$:

$$\boxed{\mathbf{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}.$$

При этом $\mathbf{r}$ называется ***модулем*** комплексного числа $\mathbf{z}$, который равняется $\mathbf{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$; $\boldsymbol{\varphi}$ - называется ***аргументом*** комплексного числа и обозначается $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Arg\,z = arg\,z + 2\pi k}$, $\mathbf{k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$. Здесь $\mathbf{arg\,z} = \boldsymbol{\varphi_0}$ - главное значение аргумента, такое, что $-\pi < \varphi_0 \le \pi$ и $\mathbf{tg}\varphi_0 = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$.

Замечание. ***При нахождении угла φ_0 из последнего соотношения надо учитывать четверть, в которой находится угол φ_0.***

Пример. Записать число $\mathbf{z = 1 - i}$ в тригонометрической форме.

Решение: для заданного числа z в алгебраической форме имеем: $x = 1$, $\mathbf{y = -1}$. Тогда $\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{x^2 + y^2}} = \sqrt{\mathbf{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{\mathbf{2}}$; $\mathbf{tg}\varphi_0 = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{1}} = \mathbf{-1}$ и $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{4}$, либо $\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{4}$. Так как точка $\mathbf{z}$ находится в ***четвертой*** четверти, то $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{4}$. Следовательно, тригонометрическая форма записи числа $\mathbf{z = 1 - i}$ имеет вид $\mathbf{z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$.

<u>Замечание.</u> Сопряженное число $\mathbf{\bar{z} = x - i\,y}$ ***в тригонометрической форме записывается так:***

$$\mathbf{\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r(\cos\varphi - i \sin\varphi),}$$

причем $\mathbf{r = |\bar{z}| = |z|, \quad Arg\,\bar{z} = -Arg\,z.}$

Применяя формулу Эйлера

$$\boxed{\mathbf{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi}},$$

можно комплексное число $\mathbf{z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)}$ записать в виде

$$\boxed{\mathbf{z = r \cdot e^{i\varphi}}}.$$

Это ***<u>показательная форма</u>*** записи комплексного числа.

Таким образом, существует несколько форм записи комплексного числа:

алгебраическая форма	$\mathbf{z = x + i\,y}$
тригонометрическая форма	$\mathbf{z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)}$
показательная форма	$\mathbf{z = r \cdot e^{i\varphi}}$

<u>Замечание</u>. Необходимо уметь переходить от записи комплексного числа в алгебраической форме к тригонометрической и показательной формам записи и обратно.

1.2. Действия с комплексными числами

Пусть заданы два комплексных числа $\mathbf{z_1 = x_1 + i\,y_1}$ и $\mathbf{z_2 = x_2 + i\,y_2}$.

а). **Равенство двух комплексных чисел:** два комплексных числа равны, если равны их мнимые и действительные части, т.е.:

$$\mathbf{z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2}.$$

б). **Сложение (вычитание) комплексных чисел:** для того, чтобы сложить (вычесть) два комплексных числа, необходимо сложить (вычесть) соответственно их мнимые и действительные части, т.е.:

$$\mathbf{z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)}.$$

Геометрически сложение (вычитание) комплексных чисел ***соответствует сложению*** (вычитанию) ***представляющих их радиус-векторов***.

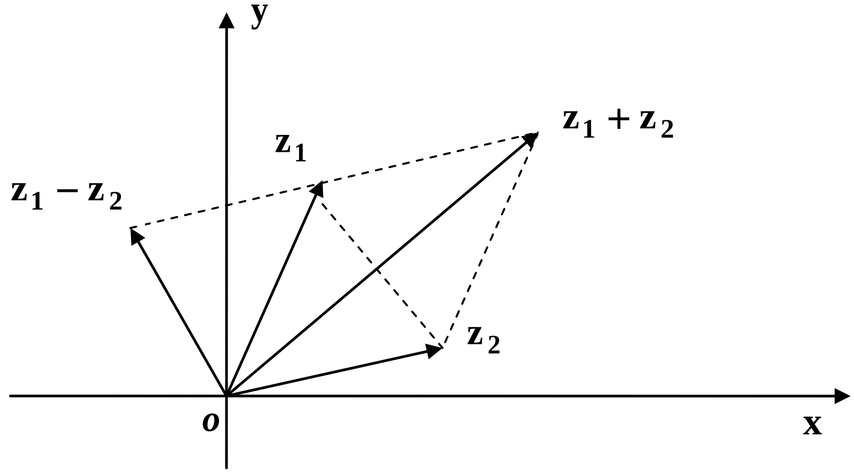


Рис.2. Сложение и вычитание комплексных чисел

в). **Умножение комплексных чисел:** умножение двух комплексных чисел ***производится по правилам умножения многочленов*** с учетом того, что $\mathbf{i^2 = -1}$, т.е.:

$$\mathbf{z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i\cdot y_1x_2 + x_1\cdot i\cdot y_2 + i^2 y_1 y_2 =}$$

$$= x_1x_2 + i\cdot y_1x_2 + x_1\cdot i\cdot y_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

<u>Замечание</u>. При <u>умножении</u> комплексных с<u>опряженных</u> чисел $\mathbf{z}$ и $\bar{\mathbf{z}}$ получаем действительное число:

$$z\cdot\bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

г). **Деление комплексных чисел:** при делении двух комплексных чисел числитель и знаменатель ***<u>умножаются</u>*** на сопряженное знаменателю число $x_2 - i\,y_2$ и затем ***<u>отделяются</u>*** действительные и мнимые части, т.е.:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2{}^2 + y_2{}^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}.$$

<u>Пример</u>. Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = 1 - 3i$ и $z_2 = 2 + 5i$. Найти сумму $z_1 + z_2$, разность $z_1 - z_2$, произведение $z_1 \cdot z_2$, частное z_1 / z_2.

Решение:

1) $z_1 + z_2 = (1-3i) + (2+5i) = (1+2) + i(-3+5) = 3 + 2i$;

2) $z_1 - z_2 = (1-3i) - (2+5i) = (1-2) + i(-3-5) = -1 - 8i$;

3) $z_1 \cdot z_2 = (1-3i)\cdot(2+5i) = 2 - 6i + 5i - i^2 15 = (2+15) + i(-6+5) =$
$= 17 - i$;

4) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-3i}{2+5i} = \frac{(1-3i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{2 - 6i - 5i + i^2 15}{4+25} = \frac{(2-15) + i(-6-5)}{29} =$$

$$= \frac{-13 - 11i}{29} = -\frac{13}{29} - i\,\frac{11}{29}.$$

Если комплексные числа записаны в ***тригонометрической*** форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то их ***умножение определяется равенством, в котором модули*** комплексных чисел ***перемножаются***, ***аргументы складываются***:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)}.$$

В этом легко убедиться, используя показательную форму комплексных чисел: $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ и формулу Эйлера. Действительно,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

Деление комплексных чисел в **тригонометрической** форме ***определяется равенством,*** *в котором* ***модули*** комплексных чисел ***делятся***, а ***аргументы вычитаются***:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)}.$$

Возведение в степень комплексного числа, записанного в ***тригонометрической*** форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ***определяется равенством***:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}.$$

Извлечение корня n***-ой степени*** из комплексного числа z <u>***определяет*** n ***различных комплексных значений***</u> $z_k = \sqrt[n]{z}$ по формуле:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Точки z_0, z_1, z_2, …, z_{k-1} ***расположены на окружности с центром в начале координат*** и ***радиусом*** $R = \sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного n-угольника, вписанного в эту окружность.

1.3. Решение квадратных уравнений и уравнений высших степеней

Рассмотрим квадратное уравнение $\mathbf{az^2 + bz + c = 0}$, где $\mathbf{a, b, c}$ – действительные числа, $\mathbf{a \neq 0}$.

Формула решения квадратного уравнения имеет вид:

$$\mathbf{z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}} \qquad (\mathbf{D = b^2 - 4ac} \text{ - дискриминант}).$$

При этом:

1. если $\mathbf{D > 0}$, то уравнение имеет ***два различных действительных корня***

$$\mathbf{z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}}, \qquad \mathbf{z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}};$$

2. если $\mathbf{D = 0}$, то уравнение имеет ***два одинаковых действительных корня*** $\mathbf{z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}}$;

3. если $\mathbf{D < 0}$, то уравнение имеет ***два комплексных сопряженных корня***

$$\mathbf{z_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-D}}{2a}}, \quad \mathbf{z_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-D}}{2a}} \qquad (\underline{\mathbf{-D > 0}})$$

Пример 1. Решить уравнение $\mathbf{x^2 + 3x + 10 = 0}$.

Решение: $\mathbf{x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-10}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-1}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}i}$.

Замечание. ***Следствие из основной теоремы алгебры говорит: всякое алгебраическое уравнение степени*** $\mathbf{n}$ ***имеет ровно*** $\mathbf{n}$ ***корней (некоторые из корней могут совпадать, некоторые будут комплексными).***

<u>Пример 2</u>. Решить уравнение $\mathbf{x^5 - 8x^2 = 0}$.

Решение: так как уравнение **пятой степени**, то оно имеет ровно **пять корней**.

Разложим левую часть уравнения на множители: $\mathbf{x^5 - 8x^2 = x^2(x^3 - 8) = x^2(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$.

Имеем: $\mathbf{x^2(x-2)(x^2+2x+4) = 0}$. Отсюда либо $\mathbf{x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0}$, либо $\mathbf{x - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2}$, либо $\mathbf{x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_{4,5} = -1 \pm i\sqrt{3}}$.

Ответ: $\mathbf{x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = -1 + i\sqrt{3},\ x_5 = -1 - i\sqrt{3}}$.

<u>Пример 3</u>. На комплексной плоскости начертить область, удовлетворяющую условиям:

1) $\mathbf{|z - 2 + i| \le 1}$;

2) $\mathbf{|\arg(z - 2 + i)| \le \frac{\pi}{3}}$;

3) $\mathbf{\operatorname{Re} z < 1}$;

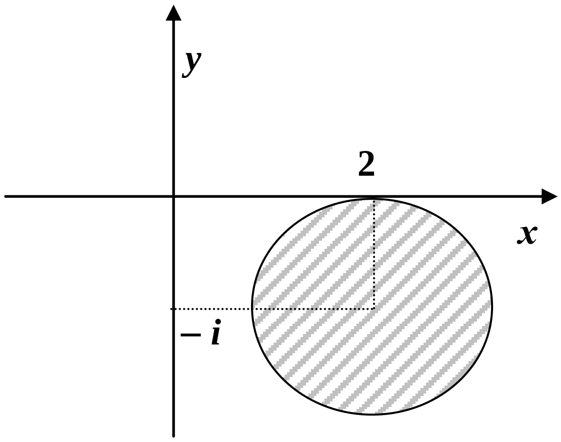
4) $\mathbf{\operatorname{Im} z \le 3}$

Решение: пусть $\mathbf{z = x + iy}$; $\mathbf{z_0 = 2 - i}$. Тогда:

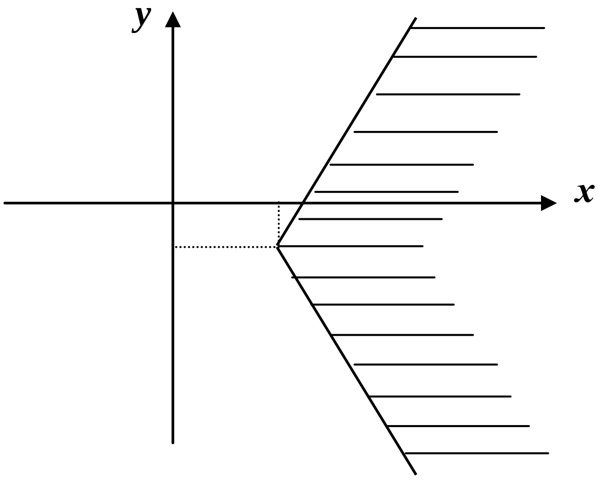
$$|z - z_0| = |x + iy - (2 - i)| = |(x-2) + i(y+1)| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}.$$

Таким образом, из неравенства $\mathbf{|z - z_0| \le 1}$ следует, что $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \le 1$ или $(x-2)^2 + (y-1)^2 \le 1$.

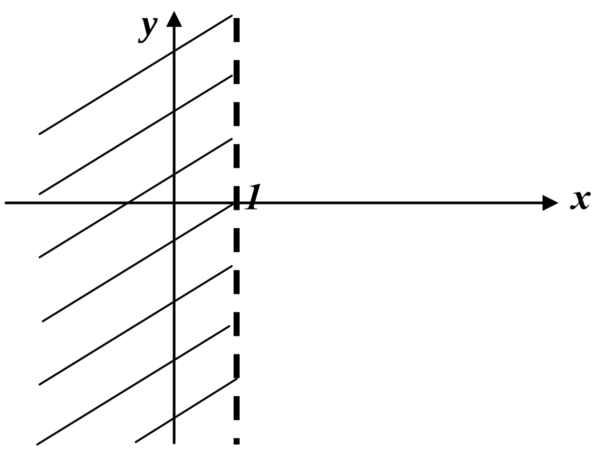
1.Неравенство $\mathbf{|z - 2 + i| \le 1}$ **есть множество точек круга радиуса 1 с центром в точке** $\mathbf{z_0 = 2 - i}$.



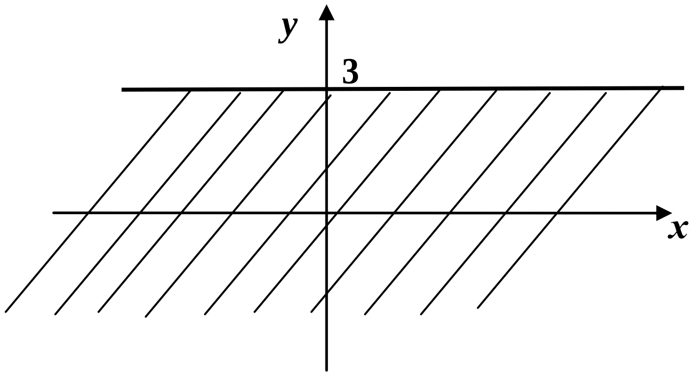
2. Условие $\left|\arg(z-2+i)\right| \le \dfrac{\pi}{3}$ **выделяет сектор с центром в точке $z_0 = 2 - i$ и лучами** $\arg(z-2+i) = \dfrac{\pi}{3}$ и $\arg(z-2+i) = -\dfrac{\pi}{3}$.



3. $\operatorname{Re} z < 1 \Rightarrow x < 1$ **- полуплоскость без граничных точек прямой** $x = 1$.



4. $\operatorname{Im} z \le 3 \Rightarrow y \le 3$ **- полуплоскость (включая границу** $y = 3$).



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

	Задание 1. *Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел* z_1, z_2, *если*	***Ответы***			
		$z_1 + z_2$	$z_1 - z_2$	$z_1 \cdot z_2$	z_1 / z_2
1.	$z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 3 - 4i$	$4 - 2i$	$-2 + 6i$	$11 + 2i$	$-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
2.	$z_1 = 2 - i$; $z_2 = -3 - 2i$	$-1 - 3i$	$5 + i$	$-4 - 7i$	$-\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$
3.	$z_1 = -3 + i$; $z_2 = -3 + 4i$	$-6 + 5i$	$-3i$	$5 - 15i$	$\frac{13}{25} + \frac{9}{25}i$
4.	$z_1 = -3 - 2i$; $z_2 = 1 + 3i$	$-2 + i$	$-4 - 5i$	$3 - 11i$	$-\frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$

	Задание 2. *От алгебраической формы записи комплексного числа* z *перейти к тригонометрической и показательной формам записи комплексного числа*	***Ответы***	
		Тригонометрическая форма записи комплексного числа	***Показательная форма записи комплексного числа***
1.	$z = -2 + 2i$	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$	$2\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

	Задание 2. От алгебраической формы записи комплексного числа z перейти к тригонометрической и показательной формам записи комплексного числа	*Ответы*	
		Тригонометрическая форма записи комплексного числа	*Показательная форма записи комплексного числа*
2.	$z=1+i$	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
3.	$z=3$	$3(\cos 0+i\sin 0)$	$3e^{i0}$
4.	$z=2i$	$2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$	$2e^{i\frac{\pi}{2}}$

	Задание 3. Решить уравнения	*Ответы*
1.	$8x^4+x=0$	$x_1=0,\ \ x_2=-\frac{1}{2},\ \ x_{3,4}=\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$
2.	$8x^5-27x^2=0$	$x_1=x_2=0,\ \ x_3=\frac{3}{2},\ \ x_{4,5}=-\frac{3}{4}\pm i\frac{3\sqrt{3}}{4}$
3.	$16x^4-1=0$	$x_1=\frac{1}{2},\ \ x_2=-\frac{1}{2},\ \ x_3=\frac{1}{2}i,\ \ x_4=-\frac{1}{2}i$
4.	$x^4+1=0$	$x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ x_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$

	Задание 4. На плоскости комплексного переменного начертить область, удовлетворяющую условиям:
1.	$\lvert z+i\rvert\ge 1; -\frac{3\pi}{4}<\arg(z+i)<-\frac{\pi}{4}; \lvert\mathrm{Re}\,z\rvert<2;\ \lvert\mathrm{Im}\,z\rvert\ge -4$
2.	$\lvert z-2i\rvert\ge 1;\ \frac{\pi}{6}<\arg(z-2i)\le\frac{5\pi}{6};\ \lvert\mathrm{Re}\,z\rvert<2; \mathrm{Im}\,z\le 4$
3.	$\lvert z-1+i\rvert\ge 1;\ \lvert\arg(z-1+i)\rvert<\frac{\pi}{4};\ \mathrm{Re}\,z\le 4;\ -3<\mathrm{Im}\,z\le 1$
4.	$\lvert z-2-i\rvert\ge 1;\ \frac{\pi}{6}<\arg(z-2-i)\le\frac{\pi}{3};\ \mathrm{Re}\,z<3;\ \mathrm{Im}\,z\le 3$

2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Рассмотрим две математические задачи. **Прямой задачей**, именуемой **дифференцированием** функции, будем называть отыскание производной $\mathbf{f'(x)}$ для заданной функции $\mathbf{f(x)}$. **Обратная задача** называется **интегрированием** функции и состоит в отыскании функции $\mathbf{F(x)}$, производная которой $\mathbf{F'(x)}$ равна заданной функции $\mathbf{f(x)}$.

2.1. Первообразная функция и неопределённый интеграл

Определение 1. Функция $\mathbf{F(x)}$ называется ***первообразной*** для функции $\mathbf{f(x)}$ на некотором промежутке $\mathbf{(a,b)}$, если для всех значений $\mathbf{x \in (a,b)}$ выполняется равенство $\boxed{\mathbf{F'(x) = f(x)}}$.

Пример 1. Пусть $\mathbf{f(x) = \cos x}$. Тогда одной из первообразных к этой функции будет функция $\mathbf{F(x) = \sin x}$, $\mathbf{x \in R}$, так как при любом $\mathbf{x \in R}$ $\mathbf{(\sin x)' = \cos x}$. Однако для $\mathbf{f(x) = \cos x}$ есть и другие первообразные, например, $\mathbf{F(x) = \sin x + 1}$, $\mathbf{F(x) = \sin x - 2}$, и вообще $\mathbf{F(x) = \sin x + C}$, где $\mathbf{C}$ - произвольная постоянная (число), так как $\mathbf{C' = 0}$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$. Множество функций $\mathbf{F(x) = \ln x + C}$ $\mathbf{(C = const)}$ будет множеством первообразных для функции $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$, так как, $\mathbf{(\ln x + c)' = \frac{1}{x}}$. Однако, если функция $\mathbf{f(x)}$ определена при $\mathbf{x \neq 0}$, то функции $\mathbf{\ln x + C}$ определены только для ***положительных*** $\mathbf{x}$.

Для того, чтобы области определения данной функции $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}}$ и ее первообразных были одинаковыми, следует аргумент x взять по абсолютной величине, т.е. $\mathbf{F(x)=\ln|x|+C}$

($\mathbf{если\ x<0,\quad то\ \ln|x|=\ln(-x)\ и\ (\ln|x|+C)'=(\ln(-x)+C)'=\frac{1}{-x}.(-1)=\frac{1}{x}}$) и множество функций $\mathbf{F(x)=\ln|x|+C}$ будет множеством первообразных для $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}}$ с такой же областью определения, что и данная функция $\mathbf{f(x)}$.

Из этих примеров, в частности, следует, что **задача отыскания** по данной функции $\mathbf{f(x)}$ её **первообразной** $\mathbf{F(x)}$ решается **неоднозначно**. Покажем, что **множество функций** $\mathbf{F(x)+C}$, где $\mathbf{F(x)}$ - некоторая первообразная для функции $\mathbf{f(x)}$, а $\mathbf{C}$ - произвольная постоянная, **исчерпывает все первообразные** для функции $\mathbf{f(x)}$.

<u>Теорема</u>. Если $\mathbf{F_1(x)}$ и $\mathbf{F_2(x)}$ две первообразные для $\mathbf{f(x)}$, $\mathbf{x\in(a,b)}$, то $\mathbf{F_2(x)=F_1(x)+C}$, где $\mathbf{C}$ - произвольная постоянная.

<u>Доказательство:</u> так как $\mathbf{F_1(x)}$ и $\mathbf{F_2(x)}$ первообразные для $\mathbf{f(x)}$, $\mathbf{x\in(a,b)}$, то $\mathbf{F_1'(x)=f(x)}$ и $\mathbf{F_2'(x)=f(x)}$. Рассмотрим разность $\mathbf{\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)}$. Тогда

$$\mathbf{\Phi'(x)=[F_1(x)-F_2(x)]'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0}$$

при всех $\mathbf{x\in(a,b)}$. Пусть $\mathbf{x_\circ}$ – любое (но фиксированное) значение аргумента $\mathbf{x_\circ\in(a,b)}$, а $\mathbf{x}$ – произвольное (другое) значение $\mathbf{x\in(a,b)}$.

По формуле Лагранжа получаем равенство:

$$\mathbf{\Phi(x)-\Phi(x_\circ)=\Phi'(\xi)\cdot(x-x_\circ)},$$

где ξ – некоторое число между значениями $\mathbf{x_\circ}$ и $\mathbf{x}$. Так как $\mathbf{\Phi'(\xi)=0}$, то $\mathbf{\Phi(x)-\Phi(x_\circ)=0}$. Следовательно, $\mathbf{\Phi(x)=\Phi(x_\circ)}$.

В силу произвольности x получаем, что $\Phi(x) \equiv \Phi(x_\circ)$, т.е. $\Phi(x)$ сохраняет постоянное значение $C = \Phi(x_\circ)$. Итак $F_1(x) - F_2(x) = C$. Теорема доказана.

Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определяемая выражением $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$ $(F'(x) = f(x))$.

Нахождение неопределенного интеграла называется интегрированием, функция $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением. Знак интеграла $\int$ является искаженным знаком буквы S, обозначающей сумму.

2.2. Основные свойства неопределенного интеграла

***а*).** Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$.

***б*).** Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\left(\int f(x)dx\right)' = d\left(F(x) + C\right)' = F'(x)dx = f(x)dx.$$

***в*).** Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

***г*).** Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k = const).$$

***д*).** Неопределённый интеграл от алгебраической суммы интегрируемых функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int\left(f(x)+g(x)-h(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx-\int h(x)dx.$$

Основные свойства вытекают из определений **1** и **2** п. **2.1.**, а также из правил дифференцирования алгебраической суммы функций и функции, умноженной на постоянный множитель.

2.3. Таблица простейших интегралов

	Интеграл	***Первообразная***
1	$\int x^{\alpha}dx \quad (\alpha\in R, \alpha\neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\in R, \alpha\neq -1)$
2	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
3	$\int a^{x}dx \quad (a>0, a\neq 1)$	$\frac{a^{x}}{\ln a}+C \quad (a>0, a\neq 1)$
4	$\int e^{x}dx$	$e^{x}+C$
5	$\int \sin x\,dx$	$-\cos x+C$
6	$\int \cos x\,dx$	$\sin x+C$
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}x+C$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}x+C$
9	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}+C$
11	$\int \frac{dx}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$

	Интеграл	***Первообразная***
12	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
13	$\int shx\,dx$	$ch\,x + C$
14	$\int chx\,dx$	$shx + C$

Замечание 1. ***Формулы таблицы необходимо выучить. Однако этого далеко не достаточно для того, чтобы научиться интегрировать.***

Замечание 2. ***Все эти формулы можно проверить непосредственным дифференцированием правой части.***

Замечание 3. ***В формулах 2), 11) и 12) поставлены модули, чтобы расширить применимость формул и на отрицательные значения выражений, стоящих под знаком абсолютной величины.***

2.4. Основные методы интегрирования

Суть всех методов интегрирования сводится к **преобразованию** данного интеграла **к табличному виду**. Рассмотрим наиболее широко применяемые методы интегрирования.

2.4.1. Метод разложения (метод непосредственного интегрирования)

При использовании этого метода достаточно **знать таблицу** основных интегралов **и основные свойства** неопределённого интеграла.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int 4\sqrt[3]{x^2}\,dx$. Проверить дифференцированием полученный результат.

Решение: выносим за знак интеграла постоянный множитель **4** (п.**2.2.**- г).) и преобразуем подынтегральную функцию по формуле: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

$$\int 4\sqrt[3]{x^2}dx = 4\int \sqrt[3]{x^2}dx = 4\int x^{\frac{2}{3}}dx = (\text{по формуле 1 п.2.3}) = 4\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C =$$

$$= 4\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \underline{\underline{\frac{12}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2} + C}}.$$

Проверка: $\left(\frac{12}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2} + C\right)' = \left(\frac{12}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)' + (C)' = \frac{12}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = 4\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

<u>**Пример 2.**</u> Вычислить интеграл $\int\left(3^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sin x\right)dx.$

Решение: так как интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов от каждого слагаемого (свойство д). п. **2.2.**), то имеем:

$$\int\left(3^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sin x\right)dx = \int 3^x dx + \int\frac{dx}{\sqrt{x}} - 2\int \sin x dx.$$

Каждый из полученных интегралов - табличный (см. формулы **3, 1, 5**) п**. 2.3.** соответственно). Следовательно,

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C_1, \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_2 = 2\sqrt{x} + C_2 ,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C_3 .$$

Таким образом

$$\int\left(3^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sin x\right)dx = \frac{3^x}{\ln 3} + 2\sqrt{x} + 2\cos x + C .$$

Замечание. ***При вычислении интеграла от суммы нескольких функций сумму произвольных постоянных, которая при этом получается, заменяют одной произвольной постоянной. Здесь*** $C_1 + C_2 + C_3 = C$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+2}{x}dx$.

Решение: разделив почленно числитель подинтегральной функции на её знаменатель и, используя свойства г). и д). п.**2.2**. и формулы **1** и **2** п.**2.3.,** получаем

$$\int \frac{x^2+2}{x}dx = \int\left(x+\frac{2}{x}\right)dx = \int x dx + 2\int\frac{dx}{x} = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + C}}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение: преобразуем числитель по формуле $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Тогда $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\frac{1+2\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Разделив почленно числитель подинтегральной функции на её знаменатель и применив правило деления степеней с одинаковыми основаниями $\left(\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}\right)$, получим:

$$\int\frac{1+2\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{2}{3}}\right)dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx + 2\int x^{\frac{1}{6}}dx + \int x^{\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2/3} + 2\cdot\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7/6} + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3} + C = \underline{\underline{\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{12x\sqrt[6]{x}}{7} + \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5} + C.}}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Решение: используя тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и формулы **7** и **8** п.**2.3.**, получим:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \underline{\underline{tgx - ctgx + C}}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

	Задание . ***Вычислить интегралы***	***Ответы*** ***(проверить дифференцированием)***
1	$\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$	$2x^5 - \frac{1}{x^3} + c$
2	$\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx$	$\frac{x^2}{2} + 2\ln\|x\| - \frac{1}{2x^2} + C$
3	$\int \frac{x - 2}{\sqrt{x^3}} dx$	$\frac{2(x + 2)}{\sqrt{x}} + C$
4	$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$	$2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + C$
5	$\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$	$e^x + \frac{1}{x} + C$
6	$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$	$-ctgx - tgx + C$
7	$\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$	$\cos x - ctgx + C$

	Задание . ***Вычислить интегралы***	***Ответы*** ***(проверить дифференцированием)***
8	$\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$	$x+\cos x+C$
9	$\int e^x\left(1+\frac{2e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$	$e^x+2\mathrm{tg}x+C$
10	$\int \mathrm{tg}^2 x dx$	$\mathrm{tg}x-x+C$

2.4.2. Интегрирование методом замены переменной (подстановки)

Метод замены переменной (подстановки) является одним из основных методов интегрирования. **Суть его** в том, чтобы **с помощью удачно выбранной подстановки** в подынтегральном выражении **свести интеграл к табличному или к такому, метод вычисления которого уже известен**. Метод базируется на следующем свойстве неопределённого интеграла:

Неопределённый интеграл не зависит от выбора переменной интегрирования.

Отсюда следует, что если $\int f(x)dx = F(x)+C$, где *x* - **независимая переменная**, то $\int f(u)du = F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ - **любая дифференцируемая функция x**.

Последнюю формулу можно записать так:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C.$$

Замечание. ***Напомним, что если*** $y=f(x)$ ***- дифференцируемая функция аргумента*** x***, то дифференциал*** dy ***равен*** $f'(x)dx$ $\boxed{dy=f'(x)dx}$. ***При этом полезно учесть некоторые преобразования***

дифференциала:

а) $\mathbf{dx = d(x + a)}$ – ***под знаком дифференциала можно прибавлять любое число*** $\mathbf{a}$***;***

б) $\mathbf{a \cdot dx = d(a \cdot x)}$ ***или*** $\mathbf{dx = \frac{1}{a} d(ax)}$ – ***постоянный множитель можно вносить (выносить) под знак (из под знака) дифференциала.***

В общем случае преобразование дифференциала осуществляется по формуле $\mathbf{\varphi'(x)dx = d(\varphi(x) + a)}$, где выбор функции $\mathbf{\varphi(x)}$ и постоянной $\mathbf{a}$ определяется видом подынтегрального выражения.

Например: $\mathbf{3x^2 \cdot dx = d(x^3 + a)}$; $\mathbf{\frac{dx}{\sqrt{x}} = d(2\sqrt{x} + a)}$; $\mathbf{\frac{dx}{x} = d(\ln x + a)}$; $\mathbf{\frac{dx}{x^2} = d\left(-\frac{1}{x} + a\right)}$; $\mathbf{\frac{dx}{1 + x^2} = d(arctgx + a)}$; $\mathbf{-\sin x\, dx = d(\cos x + a)}$; $\mathbf{\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = d(\arcsin x + a)}$ и т.д..

<u>**Пример 1.**</u> Вычислить интеграл $\mathbf{\int \sin^3 x\, d(\sin x)}$.

Решение: здесь под знаком дифференциала уже находится дифференцируемая функция $\mathbf{\sin x}$. Положив, что $\mathbf{u = \sin x}$ (тогда $\mathbf{du = d(\sin x)}$) получаем табличный интеграл. Действительно

$$\mathbf{\int \sin^3 x d(\sin x) = \begin{bmatrix} u = \sin x \\ du = d(\sin x) \end{bmatrix} = \int u^3 du =} \text{ (\textbf{\textit{формула 1 п.}} \textbf{2.3}) } =$$

$$\mathbf{= \frac{u^4}{4} + C =} \text{(возвращаемся к переменной } \mathbf{x} \text{)} \mathbf{= \underline{\underline{\frac{\sin^4 x}{4} + C}}}.$$

<u>**Пример 2.**</u> Вычислить интеграл $\mathbf{\int \sin^3 x \cdot \cos x dx}$.

Решение: рассмотрим два способа вычисления этого интеграла.

I способ (замена переменной)

Введем новую переменную $\mathbf{u = \sin x}$, и находим ее дифференциал $\mathbf{du = \cos x dx}$. Тогда

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \begin{bmatrix} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{bmatrix} = \int u^3 du = \text{(\textit{формула 1, п.}2.3)=}$$

$$= \frac{u^4}{4} + C = \text{(возвращаемся к переменной } x \text{) = } \underline{\underline{\frac{\sin^4 x}{4} + C}}.$$

II способ (подведение под знак дифференциала функции)

Так как $\mathbf{\cos x dx = d(\sin x)}$, то можно записать

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = [\cos x dx = d(\sin x)] = \int \sin^3 x \, d(\sin x) =$$

$$\text{=(см. пример 1) =} \underline{\underline{\frac{\sin^4 x}{4} + C}}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{2x dx}{1 + x^2}$.

Решение: вычислим интеграл также двумя способами.

I способ (замена переменной)

Положим $\mathbf{u = 1 + x^2}$. Тогда $\mathbf{du = 2x dx}$ и

$$\int \frac{2x \, dx}{1 + x^2} = \begin{bmatrix} u = 1 + x^2 \\ du = 2x dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u} = \text{(\textit{формула 2, п.}2.3)=}$$

$$= \ln|u| + C = \text{(возвращаемся к переменной } x \text{)=} \underline{\underline{\ln\left|1 + x^2\right| + C}}.$$

II способ (подведение под знак дифференциала функции)

Так как $\mathbf{2x \, dx = d(1 + x^2)}$, то

$$\int \frac{2x \, dx}{1 + x^2} = \left[2x \, dx = d(1 + x^2)\right] = \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} = \text{(\textit{формула 2 .п}2.3)=} \underline{\underline{\ln\left|1 + x^2\right| + C}}.$$

Замечание. ***Легко видеть, что в примерах 1 и 2 вычислялся один и тот же интеграл.***

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \sin 3x dx$.

Решение: данный интеграл не является табличным, так как аргумент синуса равен $3x$, а под знаком дифференциала стоит x. Поскольку $3d(x) = d(3x)$, то можно аргумент синуса и выражение под дифференциалом сделать одинаковыми, внесением **3** под знак дифференциала. Для этого умножим и разделим интеграл на **3** и, используя свойства интеграла и дифференциала, получим

$$\int \sin 3x\, dx = \frac{3}{3}\int \sin 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x \cdot (3dx) = \frac{1}{3}\int \sin 3x\, d(3x) = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\cos 3x + C}}.$$

Здесь замена переменной проведена неявным образом (**приём подведения некоторой функции под знак дифференциала**).

Пример 5. Вычислить интеграл $\int tgx dx$.

Решение:

$$\int tgx\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = \begin{bmatrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{bmatrix} = -\int \frac{-\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C =$$
$$= \underline{\underline{-\ln|\cos x| + C.}}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{\arcsin x - 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение: разделив почленно числитель на знаменатель и применив свойство д).п.**2.2.**, запишем:

$$\int \frac{\arcsin x - 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int \frac{\arcsin x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{-2x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

К каждому интегралу применим метод замены переменной:

$$\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \end{matrix} \right| = \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C_1 = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + C_1$$

$$\int \frac{-2x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} u = 1 - x^2 \\ du = -2x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_2 =$$

$$= 2\sqrt{u} + C_2 = 2\sqrt{1-x^2} + C_2 .$$

В итоге имеем $$\int \frac{\arcsin x - 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + 2\sqrt{1-x^2} + C$$

(в силу произвольности C_1 и C_2 записана одна общая произвольная постоянная $C = C_1 + C_2$).

<u>Замечание.</u> В некоторых случаях удобнее делать замену переменной не в виде $u = \varphi(x)$ ***, а в виде*** $x = \psi(u)$

<u>Пример 7.</u> ***Вычислить интеграл*** $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} dx$.

Решение: сделаем замену $x = u^2$ (её цель – **освободиться от иррациональности под знаком интеграла**). Тогда $dx = 2udu$ и

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} dx = \int \frac{u+1}{u-1} \cdot 2u\, du = 2\int \frac{u^2+u}{u-1} du .$$

Получили интеграл от рациональной неправильной дроби (подробнее вычисление подобных интегралов см. ниже п. **2.4.4**).

Разделим числитель дроби на знаменатель уголком (выделим целую часть дроби)

$$\begin{array}{r|l} -\;u^2+u & u-1 \\ \underline{u^2-u} & \overline{u+2} \\ -\;2u & \\ \underline{2u-2} & \\ 2 & \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{u^2+u}{u-1}=u+2+\frac{2}{u-1}.$$

Следовательно

$$2\int\frac{u^2+u}{u-1}du=2\left[\int\left(u+2+\frac{2}{u-1}\right)du\right]=2\left(\int u\,du+2\int du+2\int\frac{du}{u-1}\right)=$$

$$=2\left(\frac{u^2}{2}+2u+2\ln|u-1|\right)+C \text{ (вернёмся к нашей переменной } x\text{)=}$$

$$\underline{\underline{=x+4\sqrt{x}+4\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C}}.$$

<u>Пример 8.</u> Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

Решение: чтобы освободиться от обеих иррациональностей в подинтегральной функции, сделаем замену $x=u^6$ (показатель степени **6** равен наименьшему общему знаменателю показателей степеней обеих иррациональностей ($\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$)) Тогда $\sqrt{x}=u^3$; $\sqrt[3]{x}=u^2$; $dx=6u^5du$.

Отсюда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\begin{bmatrix} x=u^6 & \sqrt{x}=u^3 \\ dx=6u^5du & \sqrt[3]{x}=u^2\end{bmatrix}=\int\frac{u^5du}{u^3+u^2}=6\int\frac{u^5du}{u^2(u+1)}=6\int\frac{u^3du}{u+1}.$$

Выделить целую часть подинтегральной функции можно, разделив (уголком) числитель на знаменатель. В данном случае можно поступить иначе – прибавить и отнять в числителе **1** и разбить интеграл на сумму двух интегралов:

$$6\int\frac{u^3du}{u+1}=6\int\frac{u^3+1-1}{u+1}du=6\int\left(\frac{u^3+1}{u+1}-\frac{1}{u+1}\right)du=$$

$$=6\int\left(u^2-u+1\right)du-6\int\frac{du}{u+1}=6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln|u+1|\right)+C=$$

=(возвратимся к переменной x) $=\underline{\underline{2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C}}$.

<u>Пример 9.</u> Вычислить интеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение: сделаем замену переменной $x=a\sin u$ (можно $x=a\cos u$) и освободимся от иррациональности под знаком интеграла. Тогда $dx=a\cos u\,du$ и

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}=a\sqrt{1-\sin^2 u}=a\sqrt{\cos^2 u}=a\cos u.$$

Следовательно

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos u\cdot a\cos u\,du=a^2\int\cos^2 u\,du=a^2\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\left(1+\cos 2u\right)du=\frac{a^2}{2}\left(\int du+\int\cos 2u\,du\right)=\frac{a^2}{2}\left(u+\frac{1}{2}\int\cos 2u\,d(2u)\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C=\underline{\underline{\frac{a^2}{2}\left(u+\sin u\cos u\right)+C}}.$$

Перейдём от переменной u к переменной x. Для этого выразим u, $\sin u$, $\cos u$ через x. Т.к. $x=a\sin u$, то $\sin u=\frac{x}{a}$ и $u=\arcsin\frac{x}{a}$,

$$\cos u=\sqrt{1-\sin^2 u}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

Окончательно получаем :

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

	Задание 1. Вычислить интегралы (методом подведения некоторой функции под знак дифференциала)	*Ответы*
1	$\int\frac{dx}{1-10x}$	$-\frac{1}{10}\ln\lvert 1-10x\rvert+C$
2	$\int\sqrt{3+x}\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3}+C$
3	$\int\frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$	$\ln\lvert x^2+x-3\rvert+C$
4	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$	$\sqrt[3]{3x+1}+C$
5	$\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$	$-\frac{1}{\ln x}+C$
6	$\int\frac{x^3dx}{x^8+1}$	$\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\left(x^4\right)+C$
7	$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$	$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)+C$
8	$\int e^{-x^2}x\,dx$	$-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$
9	$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	$2e^{\sqrt{x}}+C$
10	$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x}$	$\frac{2\sqrt{(1+\ln x)^3}}{3}+C$

	Задание 1. Вычислить интегралы (методом подведения некоторой функции под знак дифференциала)	*Ответы*
11	$\int e^{\sin x}\cos x\,dx$	$e^{\sin x}+C$
12	$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$	$-\sqrt{1+2\cos x}+C$
13	$\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$	$\frac{\sin x-2}{\cos x}+C$
14	$\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\cdot\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{4(\arccos^4 x)}+C$
15	$\int \frac{(\arcsin x)^2+2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\frac{(\arcsin x)^3}{3}-2\sqrt{1-x^2}+C$

	Задание 2. Вычислить интегралы (методом подстановки)	*Ответы*
1	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3}$	$2\left(\sqrt{x+2}-3\ln\left\|\sqrt{x+2}+3\right\|\right)+C$
2	$\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$	$\cos\frac{1}{x}+C$
3	$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	$-2\cos\sqrt{x}+C$
4	$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$	$-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^3}+C$
5	$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx \quad (u=\sin x)$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left\|1+\sqrt[3]{x+1}\right\|+C$

	Задание 2. Вычислить интегралы (методом подстановки)	*Ответы*
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$	$2\ln\left\|1+\sqrt{x}\right\|+C$
7	$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$	$2\mathrm{arctg}\sqrt{x}+C$
8	$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} \quad (u=\mathrm{tg}x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}+C$
9	$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} \quad (u=a\mathrm{tg}x)$	$\frac{1}{2a^3}\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+\frac{ax}{x^2+a^2}\right)+C$
10	$\int \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x-1}} \quad \left(u=\sqrt{e^x}\right)$	$2\ln\left(\sqrt{e^x}+\sqrt{e^x-1}\right)+C$
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	$2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+\ln\left\|\sqrt[4]{x}+1\right\|+C$

2.4.3. Интегрирование по частям

Рассмотрим метод интегрирования, который позволит вычисление одного интеграла, «более сложного», заменить вычислением другого- «более простого».

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - две функции, имеющие непрерывные производные на некотором интервале. Найдем дифференциал $d(u \cdot v)$ от произведения этих функций

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \ ,$$

где $dv = v'(x) \cdot dx, \quad du = u'(x) \cdot dx$.

Перепишем это выражение иначе

$$u\,dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

и проинтегрируем обе его части. Учитывая, что $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, получим формулу интегрирования по частям

$$\int \mathbf{u} \cdot \mathbf{dv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{du}.$$

Функция $\mathbf{v}$ **вычисляется** с помощью **дополнительного интегрирования** $\mathbf{v} = \int \mathbf{dv}$, что и обуславливает название метода - «по частям».

<u>*Замечание 1.*</u> ***При нахождении функции*** $\mathbf{v(x)}$ ***интегрированием дифференциала*** $\mathbf{dv}$ ***можно, не нарушая общности, произвольную постоянную*** $\mathbf{C}$***, возникающую при этом, положить равной нулю (в запись окончательного ответа она все равно входить не будет).***

<u>*Замечание 2.*</u> ***Применение формулы интегрирования по частям дает возможность получить интеграл*** $\int \mathbf{v\,du}$ ***более простой, чем первоначальный*** $\int \mathbf{u\,dv}$***. Важно правильно разделить подынтегральное выражение на*** $\mathbf{u(x)}$ ***и*** $\mathbf{dv(x)}$***.***

<u>**Пример 1.**</u> Вычислить интеграл $\int \mathbf{x \cdot e^{-x} dx}$.

Решение: введем обозначения $\mathbf{u(x) = x}$, $\mathbf{dv(x) = e^{-x} dx}$. Тогда $\mathbf{du(x) = dx}$ и $\mathbf{v(x) = \int e^{-x} dx = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x}}$. Используя формулу интегрирования по частям, будем иметь:

$$\int x \cdot e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = x \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int -e^{-x} dx =$$

$$= -x \cdot e^{-x} - \int e^{-x} d(-x) = \underline{\underline{-x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C}}.$$

<u>**Пример 2.**</u> Вычислить интеграл $\int \mathbf{x \cdot \ln x dx}$.

Решение: обозначим $\mathbf{u = \ln x}$, $\mathbf{dv = x\,dx}$. Получаем

$$\int x \cdot \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x \cdot dx & v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x\, dx = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.}}$$

<u>Замечание 3.</u> Применяя метод интегрирования по частям, важно правильно выбрать $u(x)$ ***и*** $dv(x)$. ***В частности, если имеем интегралы вида*** $\int P_n(x)\sin kx dx$, $\int P_n(x)\cos kx dx$, $\int P_n(x)e^{kx}dx$, ***(*** $P_n(x)$ ***-многочлен*** n***-ой степени), то выбираем*** $u(x) = P_n(x)$, ***а за*** $dv(x)$ ***все остальное. При этом интегрирование по частям проводим столько раз, какова старшая степень многочлена*** $P_n(x)$. ***Если же имеем интегралы вида*** $\int P_n(x)\arcsin kx\, dx$, $\int P_n(x)\arccos kx\, dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg} kx\, dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} kx\, dx$, $\int P_n(x)\log_a kx\, dx$, ***то обозначаем*** $dv = P_n(x)\,dx$, ***а за функцию*** $u(x)$ ***берем либо обратную тригонометрическую функцию, либо логарифм, так как во вновь получающемся интеграле*** $\int v\,du$ ***они исчезают.***

Все сказанное занесем для наглядности в таблицу:

	интеграл	$U(x)$	$dV(x)$
1	$\int P_n(x)\cdot e^{kx}dx$	$U = P_n(x)$	$dV = e^{kx}dx$
2	$\int P_n(x)\cdot \sin kx dx$	$U = P_n(x)$	$dV = \sin kx\, dx$
3	$\int P_n(x)\cdot \cos kx dx$	$U = P_n(x)$	$dV = \cos kx\, dx$
4	$\int P_n(x)\cdot \arcsin kx\, dx$	$U = \arcsin kx$	$dV = P_n(x)\,dx$
5	$\int P_n(x)\cdot \arccos kx\, dx$	$U = \arccos kx$	$dV = P_n(x)\,dx$
6	$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arctg} kx\, dx$	$U = \operatorname{arctg} kx$	$dV = P_n(x)\,dx$
7	$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arcctg} kx\, dx$	$U = \operatorname{arcctg} kx$	$dV = P_n(x)\,dx$
8	$\int P_n(x)\cdot \log_a kx\, dx$	$U = \log_a kx$	$dV = P_n(x)\,dx$
9	$\int P_n(x)\cdot \ln kx\, dx$	$U = \ln kx$	$dV = P_n(x)\,dx$

В ряде случаев применение метода интегрирования по частям приводит снова к первоначальному интегралу. При этом получается уравнение, из которого и находится искомый интеграл (**цикличное интегрирование**).

<u>**Пример 3.**</u> Вычислить интеграл $\int e^x \sin x dx$.

Решение: воспользуемся формулой интегрирования по частям. Обозначим

$u = \sin x$, $dv = e^x dx$. Получим:

$$\int e^x \sin x\, dx = \begin{bmatrix} u = \sin x & du = \cos x dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{bmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Вычислим теперь интеграл $\int e^x \cos x dx$. Он отличается от исходного заменой в подынтегральной функции синуса на косинус. Снова интегрируем по частям. Тогда

$$\int e^x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} u = \cos x & du = \sin x\, dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{bmatrix} = e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx.$$

Следовательно, исходный интеграл равен:

$$\int \underline{e^x \sin x\, dx} = e^x \sin x - e^x \cos x - \int \underline{e^x \sin x\, dx}\ .$$

Получили уравнение относительно интеграла $\int e^x \sin x dx$. Перенеся интеграл из правой части в левую часть уравнения и складывая, получаем:

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x.$$

Окончательно получим, введя произвольную постоянную, что

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Аналогично, вычисляется и интеграл $\int e^x \cos x dx$ и, вообще, интегралы вида $\int e^{kx} \sin mx\, dx$, $\int e^{kx} \cos mx\, dx$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

	Задание. Вычислить интегралы	*Ответы*
1.	$\int x\sin x\,dx$	$-x\cos x+\sin x+C$
2.	$\int x^2\cos 3x\,dx$	$\frac{1}{3}x^2\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C$
3.	$\int x^3\ln x\,dx$	$\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}+C$
4.	$\int\frac{\ln x}{x^2}dx$	$-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$
5.	$\int \operatorname{arctg} x\,dx$	$x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left\|1+x^2\right\|+C$
6.	$\int xe^{2x}dx$	$\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$
7.	$\int x\ln^2 x\,dx$	$\frac{x^2\ln x(\ln x-1)}{2}+\frac{x^2}{4}+C$
8.	$\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$	$x\operatorname{tg} x+\ln\left\|\cos x\right\|+C$
9.	$\int e^x\ln\left(e^x+1\right)dx$	$\left(e^x+1\right)\ln\left(e^x+1\right)-e^x+C$
10.	$\int e^{2x}\cos 3x\,dx$	$\frac{e^{2x}}{13}\left(2\cos 3x+3\sin 3x\right)+C$

2.4.4. Интегрирование дробно-рациональных функций

Рассмотрим методы вычисления интегралов вида:

$$\int f(x)dx=\int\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx,$$

где $Q_m(x)-$ целый многочлен m-го порядка и $P_n(x)-$ целый многочлен n-го порядка:

$$Q_m(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0\qquad\left(b_m\neq 0\right),$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

(предполагается, что коэффициенты многочленов a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и b_j $(j = 0,1,2,\ldots m)$ - действительные числа).

<u>Определение 1.</u> <u>***Дробно–рациональной функцией***</u> (или <u>***рациональной дробью***</u>) называется функция $f(x)$, равная отношению двух многочленов, т.е. $f(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$.

<u>Определение 2.</u> Если степень многочлена $Q_m(x)$, стоящего в числителе, больше или равна степени многочлена $P_n(x)$, стоящего в знаменателе $(m \geq n)$, то дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ называется ***неправильной.***

Если же $m < n$, рациональная дробь ***правильная*** .

<u>Теорема</u>. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы **многочлена** (целая часть) и **правильной рациональной дроби,** т.е.

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)}.$$

<u>Пример 1</u>. Представить неправильную дробь $\dfrac{x^3 + x - 1}{x + 1}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение: разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов. Это деление осуществим «уголком», причем, делим до тех пор, пока показатель степени x в остатке не окажется меньше показателя степени x делителя.

$$
\begin{array}{r|l}
\_\,x^3+x-1 & \,x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+x^2} & x^2-x+2 \\
\_-x^2+x-1 & \\
\underline{-x^2-x} & \\
\_\,2x-1 & \\
\underline{2x+2} & \\
-3 &
\end{array}
.
$$

В итоге получим:

$$\frac{x^3+x-1}{x-1}=\underbrace{x^2-x+2}_{\text{целая часть}}+\underbrace{\frac{-3}{x+1}}_{\text{правильная дробь}}.$$

<u>Пример 2.</u> Выделить целую часть дроби $\frac{x^3-1}{x+2}$ и найти остаток от деления.

Решение: можно было бы выделить целую часть дроби аналогичным с примером **1** образом – поделив числитель на знаменатель «уголком». В данном случае поступим иначе – прибавим и отнимем в числителе **8**, разобьем дробь на две дроби и воспользуемся формулой сокращенного умножения $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Получим:

$$\frac{x^3-1}{x+2}=\frac{(x^3+8)-8-1}{x+2}=\frac{(x^3+2^3)}{x+2}-\frac{9}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}-$$

$$-\frac{9}{x+2}=x^2-2x+4-\frac{9}{x+2}.$$

Рассмотрим более сложный пример.

<u>Пример 3.</u> Выделить целую часть дроби $\frac{x^4-6x^3+12x^2+1}{x^3+x^2-x-8}$.

Решение: разделим числитель на знаменатель «уголком»:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 1 & x^3 + x^2 - x - 8 \\ \cline{2-2}
 & x - 7 \\
\underline{x^4 + x^3 - x^2 - 8x} & \\
\_\quad -7x^3 + 13x^2 + 8x + 1 & \\
\underline{\quad -7x^3 - 7x^2 + 7x + 56} & \\
\qquad\qquad 20x^2 + x - 55 &
\end{array}
.
$$

Тогда

$$\frac{x^4 - 6x^3 + 12x + 1}{x^3 + x^2 - x - 8} = \underbrace{x - 7}_{\text{целая часть}} + \underbrace{\frac{20x^2 + x - 55}{x^3 + x^2 - x - 8}}_{\text{правильная дробь}}.$$

Поскольку интегрирование целой части (многочлена) осуществляется легко с использованием формулы **1** п.**2.3**. и свойства **д)**. п.**2.2**., то следует рассмотреть методы интегрирования **правильных** рациональных дробей.

Предполагаем, что дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ правильная, т.е. $m < n$.

Приведем некоторые сведения об алгебраических многочленах $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с действительными коэффициентами a_i, $(i = 0,1,2,\ldots,n)$, $a_n \neq 0$.

Определение 3. ***Число*** $x_\circ$ (действительное или комплексное), при котором **многочлен** $P_n(x)$ **обращается в ноль**, т.е. $P_n(x_\circ) \equiv 0$, называется ***корнем*** многочлена $P_n(x)$.

Основная теорема алгебры.

Всякий алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени n $(n > 0)$ **имеет, по крайней мере, один корень** (действительный или комплексный).

Следствие основной теоремы алгебры.

Всякий многочлен $P_n(x)$ n-ой степени **имеет ровно n корней** и, следовательно, **разлагается на линейные множители** по формуле:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n). \qquad (*)$$

Здесь $a_n \neq 0$-коэффициент при старшей степени многочлена $P_n(x)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - корни многочлена $P_n(x)$ (действительные или комплексные).

Определение 4. Корень многочлена x_i называется ***простым***, если в разложение $(*)$ многочлена $P_n(x)$ множитель $(x - x_i)$ **входит один раз**. Если же этот множитель входит в разложение $(*)$ k **раз**, то корень x_i называется ***корнем кратности*** k .

Объединим в разложении $(*)$ все одинаковые множители (если они есть). Получим $P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_r)^{k_r}$,причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, а $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – ***различные корни*** $P_n(x)$ (действительные или комплексные).

Кроме того известно, что если коэффициенты многочлена $P_n(x)$ **действительные числа** и его корнем является комплексное число $z = a + bi$, то и сопряженное к нему комплексное число $\bar{z} = a - bi$, будет также корнем $P_n(x)$, причем **той же кратности**.

Если в разложении $(*)$ перемножить множители $(x - (a + bi))$ и $(x - (a - bi))$ соответствующие этим корням, то получим квадратный трехчлен $(x^2 + px + q)$, с **действительными коэффициентами** p и q .

В самом деле

$$(x-(a+bi))\cdot(x-(a-bi))=[((x-a)-bi)\cdot((x-a)+bi)]=$$
$$=\left[(x-a)^2-(bi)^2\right]=\left[x^2-2ax+a^2+b^2\right]=\left[x^2+px+q\right]$$

(здесь обозначено: $p=-2a,\quad q=a^2+b^2$).

Следовательно, окончательно разложение многочлена $P_n(x)$ на множители представляется в виде:

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_s)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdot$$
$$\cdot\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{l_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{l_t},$$

причем $k_1+k_2+\ldots+k_s+2l_1+2l_2+\ldots+2l_t=n$,

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ – *различные действительные корни* $P_n(x)$,

p_i, q_i – $(i=1,2,\ldots,t)$-действительные числа и квадратные трехчлены, входящие в эту формулу, имеют корнями **комплексно-сопряженные числа.**

Таким образом алгебраический многочлен с действительными коэффициентами может иметь:

- простые действительные корни;
- кратные действительные корни;
- простые комплексно-сопряженные корни;
- кратные комплексно-сопряженные корни.

При интегрировании правильной рациональной дроби $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ $(m<n)$ применяют **разложение** ее **на простейшие дроби.**

<u>Определение5.</u> Назовем ***<u>простейшими</u>*** (элементарными) ***<u>дробями</u>*** дроби вида:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ ($k>1$ и целое);

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ ($k>1$ и целое),

где A, M, N, a, p, q - действительные числа .

При интегрировании правильной рациональной дроби $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ возможны следующие четыре случая:

1.*<u>Знаменатель имеет только действительные простые корни</u>*, т.е. многочлен $P_n(x)$ разлагается только на линейные множители $P_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$ и, следовательно, рациональная дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ будет представима в виде $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Q_m(x)}{a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}$.

Тогда разложение на простейшие дроби имеет вид:

$$\boxed{\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n}},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - **действительные числа, подлежащие определению**, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - простые действительные корни.

Действительному простому корню знаменателя **соответствует одна простейшая дробь вида** $\frac{A}{x-a}$**.**

Рассмотрим на примерах методы нахождения коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

<u>Пример 1</u>. Разложить дробь $\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}$ на сумму простейших дробей.

Решение: данная дробь – правильная и знаменатель дроби имеет **только действительные простые корни:** $x_1=0, x_2=-3, x_3=2$. Множители, стоящие в знаменателе, будут знаменателями простейших дробей и разложение на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{D}{x-2}$$

(каждому простому действительному корню соответствует одна простейшая дробь). Коэффициенты $\mathbf{A, B, D}$ – неизвестные действительные числа. Найдем их. Для этого приведем дроби в правой части последнего равенства к общему знаменателю. Получим

$$\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Dx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}.$$

Так как знаменатели левой и правой частей равенства равны, то равны и числители, т.е.

$$x^2+x+5=A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Dx(x+3).$$

Коэффициенты $\mathbf{A, B, D}$ можно найти двумя способами:

<u>1-й способ. Метод частных значений</u>

Равенство

$$x^2+x+5=A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Dx(x=3)$$

выполняется при любых значениях $\mathbf{x}$. Подставляя в это равенство числовые значения $\mathbf{x}$ получим соотношения, из которых можно будет найти значения $\mathbf{A, B, D}$. При нахождении коэффициентов $\mathbf{A, B, D}$ **самыми «выгодными»** значениями $\mathbf{x}$ **являются**, очевидно, **корни знаменателя**, т.е. значения $\mathbf{x=0}$, $\mathbf{x=-3}$, $\mathbf{x=2}$, так как при этих значениях все слагаемые в правой части, кроме одного, обращаются в ноль. Подставляем поочередно корни знаменателя в последнее равенство:

при $\mathbf{x=0}$: $\quad 0+0+5=A(0+3)(0-2)+B\cdot 0+D\cdot 0\Rightarrow;$

$$\Rightarrow \quad 5=-6A \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{5}{6};$$

при $\mathbf{x=-3}$: $\quad (-3)^2+(-3)+5=B(-3)(-3-2) \quad \Rightarrow \quad B=\frac{11}{15};$

при $\mathbf{x=2}$: $\quad 2^2+2+5=D\cdot 2(2+3) \quad \Rightarrow \quad D=\frac{11}{10}.$

Ответ: $$\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}=\frac{-5/6}{x}+\frac{11/15}{x+3}+\frac{11/10}{x-2}.$$

2-й способ. Метод неопределенных коэффициентов (приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\mathbf{x}$)

В равенстве $\mathbf{x^2+x+5=A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Dx(x+3)}$, справедливом при любом $\mathbf{x}$, раскроем скобки в правой части

$$\mathbf{x^2+x+5=Ax^2+Ax-6A+Bx^2-2Bx+Dx^2+3Dx}$$

и приведем подобные члены

$$\mathbf{x^2+x+5=(A+B+D)x^2+(A-2B+3D)x-6A}.$$

Если многочлены равны, то равны коэффициенты при одинаковых степенях $\mathbf{x}$. Приравниваем их:

при $\mathbf{x^2}$: $\mathbf{1=A+B+D}$ $\quad\mathbf{1=-\frac{5}{6}+B+D}$ $\quad\mathbf{B=\frac{11}{15}}$

при $\mathbf{x^1}$: $\mathbf{1=A-2B+3D}$ $\quad\mathbf{1=-\frac{5}{6}-2B-3D}$ $\quad\mathbf{D=\frac{11}{10}}$

при $\mathbf{x^0}$: $\mathbf{5=-6A}$ $\quad\Rightarrow\quad \mathbf{A=-\frac{5}{6}}$

Таким образом $$\mathbf{\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}=\frac{-5/6}{x}+\frac{11/15}{x+3}+\frac{11/10}{x-2}}$$

<u>Замечание</u>. Если корни знаменателя действительные простые, то удобнее использовать метод частных значений.

<u>Пример 2.</u> Вычислить интеграл $\displaystyle\int\mathbf{\frac{x^4-7x^3+8x^2+18x+1}{x^3-2x^2-3x}dx}$.

Решение: подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «уголком».При этом получаем

$$\mathbf{\frac{x^4-7x^3+8x^2+18x+1}{x^3-2x^2-3x}=x-5+\frac{x^2+3x+1}{x^3-2x^2-3x}}.$$

Полученную правильную дробь разложим на простейшие дроби.

Для этого разложим знаменатель дроби на множители

$$\mathbf{x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3)=x(x+1)(x-3)}$$

(корни знаменателя **действительные простые**: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 3$). Отсюда

$$\frac{x^2+3x+1}{x^3-2x^2-3x} = \frac{x^2+3x+1}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x-3}.$$

Находим неопределенные коэффициенты $A, B, D.$ Приведем простейшие дроби к общему знаменателю. Получим

$$\frac{x^2+3x+1}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Dx(x+1)}{x(x+1)(x-3)}.$$

Приравняем числители дробей (знаменатели равны)

$$x^2+3x+1 = A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Dx(x+1).$$

Методом частных значений (1-й способ) находим:

при $x = 0$: $1 = -3A \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$;

при $x = -1$: $-1 = 4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$;

при $x = 3$: $19 = 12D \Rightarrow D = \frac{19}{12}$.

Следовательно, наш интеграл от неправильной дроби будет равен

$$\int \frac{x^4-7x^3+8x^2+18x+1}{x^3-2x^2-3x}dx = \int\left(x-5-\frac{1/3}{x}-\frac{1/4}{x+1}+\frac{19/12}{x-3}\right)dx =$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^2}{2}-5x-\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{19}{12}\ln|x-3|+C}}.$$

II. ***Знаменатель имеет действительные корни, некоторые из них кратные***, т.е. разложение многочлена имеет вид:

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

Решение: знаменатель дроби имеет **два действительных** корня - $x = 1$ и $x = -2$, причем **корень** $x = 1$ **второй кратности**.

Тогда правильная подынтегральная дробь раскладывается на простейшие дроби следующим образом:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \underbrace{\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}}_{\substack{\text{простейшие дроби,}\\ \text{соответствующие корню}\\ x=1\ \text{кратности 2}}} + \frac{D}{x+2}.$$

(Если действительный **корень знаменателя** $x_\circ$ **имеет кратность** k, то в разложении правильной дроби на простейшие **ему соответствуют** k **дробей**: $\frac{A_1}{x-x_\circ}+\frac{A_2}{(x-x_\circ)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-x_\circ)^k}$).

Приведя дроби в правой части к наименьшему общему знаменателю, приравниваем числители (знаменатели левой и правой частей равны)

$$x+3 = A(x-1)(x+2)+B(x+2)+D(x-1)^2.$$

Для нахождения двух коэффициентов (B, D) воспользуемся ***методом частных значений (1-й способ)***. Подставив в равенство $x=1$ и $x=-2$ (корни знаменателя) получим:

при $x=1$: $\quad 4 = B(1+2) \;\Rightarrow\; B=\frac{4}{3}$;

при $x=-2$: $\quad 1 = D(-3)^2 \;\Rightarrow\; D=\frac{1}{9}$.

Для нахождения коэффициента A воспользуемся ***методом неопределенных коэффициентов (2-й способ).*** Коэффициент при x^2 в левой части равен нулю (x^2 в левой части отсутствует), а в правой части $A+D$. Поэтому, $\quad A+D=0 \;\Rightarrow\; A=-D=-\frac{1}{9}$.

Следовательно,

$$\int\frac{(x+3)\,dx}{(x-1)^2(x+2)} = \int\left(\frac{-1/9}{x-1}+\frac{4/3}{(x-1)^2}+\frac{1/9}{x+2}\right)dx = -\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-1}+$$

$$+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{9}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{(-1)}+\frac{1}{9}\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{4}{3(x-1)}+C.$$

III. ***<u>Знаменатель дроби, кроме действительных корней, имеет и комплексные корни, но среди них нет равных.</u>***

<u>Пример 1.</u> Разложить рациональную дробь $\frac{x^2+3x+1}{x^3-2x^2+3x}$ на простейшие дроби.

Решение: разложим знаменатель на множители $x^3-2x^2+3x=x\left(x^2-2x+3\right)$.

Квадратный трехчлен x^2-2x+3 на линейные множители не раскладывается,

т.к. его корни – комплексно-сопряженные числа. Данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы двух простейших дробей

$$\frac{x^2+3x+1}{x^3-2x^2+3x}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+3}.$$

<u>Замечание:</u> ***Если знаменатель содержит множителем квадратный трехчлен*** x^2+px+q***, не имеющий действительных корней, то при разложении на простейшие дроби этому множителю соответствует простейшая дробь третьего вида, т.е. дробь*** $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$**.**

Приводим простейшие дроби к общему знаменателю

$$\frac{x^2+3x+1}{x^3-2x^2+3x}=\frac{A\left(x^2-2x+3\right)+\left(Mx+N\right)x}{x\left(x^2-2x+3\right)}.$$

Приравниваем числители левой и правой частей (знаменатели равны)

$$x^2+3x+1=Ax^2-2Ax+3A+Mx^2+Nx$$

или $$x^2+3x+1=\left(A+M\right)x^2+\left(N-2A\right)x+3A.$$

Приравнивая коэффициенты левой и правой частей равенства при одинаковых степенях x, получаем:

при $\mathbf{x^2}$: $\mathbf{1 = A + M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M = \frac{2}{3}}$;

при $\mathbf{x^1}$: $\mathbf{3 = N - 2A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N = \frac{11}{3}}$;

при $\mathbf{x^0}$: $\mathbf{1 = 3A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = \frac{1}{3}}$.

Таким образом $\quad \mathbf{\dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + 3x} = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{2x + 11}{3\left(x^2 - 2x + 3\right)}}$.

<u>Пример 2.</u> Вычислить интеграл $\quad \mathbf{\int \dfrac{1 - x}{x\left(x^2 + 1\right)}dx}$.

Решение: разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\mathbf{\frac{1 - x}{x\left(x^2 + 1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}}$$

(корни уравнения $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$ - комплексно-сопряженные числа $\pm \mathbf{i}$).

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю и приравняем числители. Имеем

$$\mathbf{1 - x = (A + M)x^2 + Nx + A}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $\boldsymbol{x}$:

при $\mathbf{x^2}$: $\mathbf{0 = A + M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M = -A}$;

при $\mathbf{x^1}$: $\mathbf{-1 = N} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N = -1}$;

при $\mathbf{x^0}$: $\mathbf{1 = A}$. $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 1}$

Следовательно,

$$\mathbf{\int \frac{1 - x}{x\left(x^2 + 1\right)}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x - 1}{x^2 + 1}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}\right)dx} =$$

$$= \mathbf{\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1}}.$$

Вычисляем второй интеграл (первый интеграл и третий – табличные (см.п.**2.3**, формулы **2** и **9**):

$$\mathbf{\int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} = \left[d\left(x^2 + 1\right) = 2x dx\right] = \frac{2}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2 + 1\right)}{x^2 + 1}} =$$

$$=\left[u = x^2 + 1\right] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C.$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{1-x}{x\left(x^2+1\right)}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \operatorname{arctg}x + C.$$

<u>Пример 3 .</u> Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Решение: разложим знаменатель x^3+1 на множители: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Найдем корни знаменателя

$$(x+1)(x^2-x+1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a)\ x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \\ b)\ x^2 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \ x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Корни x_2 и x_3 - комплексно-сопряженные.

Следовательно, имеет место разложение:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1).$$

Для нахождения коэффициентов A, M, N используем оба метода их нахождения.

Последнее равенство верно при любых x, в частности и при $x = -1$ (действительном корне знаменателя).

При $x = -1$: $\qquad 1 = A(1+1+1) \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{3}$.

Для определения M и N воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (приравнивания коэффициентов левой и правой частей при одинаковых степенях x).

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Mx+N)(x+1),$$

$$1 = Ax^2 - Ax + A + Mx^2 + Nx + Mx + N),$$

$$1 = x^2(A+M) + x(N+M-A) + N.$$

при x^2 $\qquad 0 = A + M \quad \Rightarrow \quad M = -A = -\frac{1}{3}$;

при x^1 $\quad 0=-A+M+N \quad \Rightarrow \quad N=A-M=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Следовательно, $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\frac{1/3}{x+1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$.

Отсюда легко вычисляем первый интеграл в правой части:

$$\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{3}\ln|x+1|+C_1 .$$

Второй интеграл в правой части - частный случай интеграла вида $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$. Метод вычисления подобных интегралов разберем на примере интеграла $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$.

Вычисление интеграла проводим в следующем порядке:

1). В числителе дроби, стоящей под интегралом, получают производную знаменателя - $\left(x^2-x+1\right)'=2x-1$. Для этого интеграл **разделим и умножим** на 2 и в числителе **отнимем и прибавим** единицу. Тогда:

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(x-2)}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)}{x^2-x+1}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}.$$

2). Вычислим первый интеграл:

$$\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}=\left[(2x-1)dx=d\left(x^2-x+1\right)\right]=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+C_2.$$

3). Для вычисления интеграла $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x+1}$ выделим в знаменателе полный квадрат:

$$-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}+C_3 =$$

$$= -\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C_3.$$

Окончательно получаем:

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \quad (C_1+C_2+C_3=C).$$

<u>Замечание.</u> ***. Аналогичным образом вычисляются и интегралы вида***

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$$

IV. ***Знаменатель дроби, наряду с действительными корнями, имеет и кратные комплексные корни.***

<u>Пример</u>. Разложить дробь $\dfrac{1}{(x-1)^2\left(x^2+4\right)^2}$ на простейшие дроби.

Решение: если $(x-1)^2=0$, то знаменатель имеет действительный корень $x=1$ кратности 2. Если $\left(x^2+4\right)^2=0$, то $x_3=2i$, $x_4=-2i$, $x_5=2i$, $x_6=-2i$, т.е. **имеются кратные комплексные корни**.

<u>Замечание</u>. Если разложение на множители многочлена $P_n(x)$, стоящего в знаменателе правильной дроби $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, имеет множитель $\left(x^2+px+q\right)^l$ с комплексно сопряженными корнями, то этому множителю соответствуют l дробей:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{\left(x^2+px+q\right)^l}.$$

Таким образом, разложение дроби $\dfrac{1}{(x-1)^2\left(x^2+4\right)^2}$ на простейшие имеет вид:

$$\frac{1}{(x-1)^2\left(x^2+4\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+4}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x нетрудно найти, что: $A=-\dfrac{4}{125}$; $B=\dfrac{1}{25}$; $M_1=\dfrac{4}{125}$; $N_1=\dfrac{3}{125}$; $M_2=\dfrac{18}{125}$; $N_2=-\dfrac{31}{125}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

	Задание 1. ***Представить неправильную дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби***	***Ответы***
1.	$\dfrac{x^2}{x-2}$	$x+2+\dfrac{4}{x-2}$
2.	$\dfrac{x^3}{x+1}$	$x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}$
3.	$\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$	$x+\dfrac{1}{x^2+1}$
4.	$\dfrac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}$	$2x-1+\dfrac{18x^2-9x+5}{x^3-9x}$
5.	$\dfrac{x^5+x^3-x^2+x+3}{x^3+2x-1}$	$x^2-1+\dfrac{3x+2}{x^3+2x-1}$

	<u>Задание 2.</u> Разложить следующие рациональные функции на простейшие дроби	*Ответы*
1.	$\frac{11x-4}{(x-2)(x+4)}$	$\frac{3}{x-2}+\frac{8}{x+4}$
2.	$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$	$\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}$
3.	$\frac{x^2+x+4}{(x-1)(x+2)x}$	$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x}$
4.	$\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}$	$\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}$
5.	$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}$	$\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2(x+1)}$
6.	$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$	$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2+1}$
7.	$\frac{x^2+1}{x^3+1}$	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)$
8.	$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{(x^2+1)^2}-\frac{x-1}{x^2+1}$

	<u>Задание 3.</u> Вычислить интегралы, выделяя полный квадрат в знаменателе	*Ответы*
1.	$\int\frac{dx}{x^2+4x+14}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{10}}+C$
2.	$\int\frac{dx}{x^2+3x+6}$	$\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{15}}+C$

	<u>Задание 3.</u> ***Вычислить интегралы, выделяя полный квадрат в знаменателе***	***Ответы***
3.	$\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 9}$	$\frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{3x-4}{\sqrt{11}} + C$
4.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$	$\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}\right) + C$
5.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$	$\arcsin \frac{x-2}{2} + C$
6.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + C$

	<u>Задание 4.</u> ***Вычислить интегралы***	***Ответы***
1.	$\int \frac{x\,dx}{x^2 - 5x + 4}$	$\frac{1}{2} \ln\left\|x^2 - 5x + 4\right\| + \frac{5}{6} \ln\left\|\frac{x-4}{x-1}\right\| + C$
2.	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$	$\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C$
3.	$\int \frac{x+3}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$	$-\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + \frac{3}{2} \arcsin 2x + C$
4.	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{4x + x^2}}$	$\sqrt{4x + x^2} - 4\ln\left\|x + 2 + \sqrt{4x + x^2}\right\| + C$

	<u>Задание 5.</u> ***Вычислить интегралы, разложив подынтегральную функцию на простейшие дроби***	***Ответы***
1.	$\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$	$\frac{1}{7} \ln\left\|\frac{x-3}{x+4}\right\| + C$

	<u>Задание 5.</u> Вычислить интегралы, разложив подынтегральную функцию на простейшие дроби	*Ответы*
2.	$\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$	$\frac{1}{2}x^2+7x-32\ln\lvert x-3\rvert+70\ln\lvert x-4\rvert+C$
3.	$\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$	$\ln\left\lvert\frac{(x-4)^{11}}{(x-3)^9}\right\rvert+C$
4.	$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$	$\ln\left\lvert\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right\rvert+C$
5.	$\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$	$-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln\lvert x-1\rvert+\frac{7}{9}\ln\lvert x+2\rvert+C$
6.	$\int \frac{3x-4}{x^4-2x^3}dx$	$\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{x-2}{x}\right\rvert+\frac{x-2}{2x^2}+C$
7.	$\int \frac{x+1}{(x-1)^3}dx$	$-\frac{x}{(x-1)^2}+C$
8.	$\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$	$\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$
9.	$\int \frac{dx}{x^3+8}$	$\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$
10.	$\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$	$x+\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert-\operatorname{arctg}x+C$

2.4.5. <u>Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции</u>

Разнообразие тригонометрических функций и особенно формул, их связывающих, приводит к большому разнообразию методов вычисления интегралов, содержащих тригонометрические функции.

Рассмотрим некоторые из этих методов интегрирования.

I. Вычисление интегралов вида $\int \sin\alpha x \cos\beta x\, dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x\, dx$, $\int \cos\alpha x \cos\beta x\, dx$, где α, β - действительные числа.

Для вычисления этих интегралов надо произведения тригонометрических функций, находящихся под знаком интегралов, преобразовать в суммы по следующим формулам:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right);$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right);$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right).$$

<u>Пример 1 .</u> Вычислить интеграл $\int \sin 3x \cdot \cos 7x\, dx$.

Решение: под знаком интеграла преобразуем произведение функций в сумму и разбиваем интеграл на сумму двух интегралов. Имеем:

$$\int \sin 3x \cdot \cos 7x\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(-4x) + \sin 10x\right)dx = = -\frac{1}{2}\int \sin 4x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x\, dx$$

$$= \frac{1}{2\cdot 4}\cos 4x - \frac{1}{2\cdot 10}\cos 10x + C = = \underline{\underline{\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C}}.$$

II. Вычисление интегралов вида $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x\, dx$.

Рассмотрим несколько случаев вычисления подобных интегралов в зависимости от чисел α и β.

<u>Первый случай.</u> Если хотя бы одно из чисел α или β ***положительное целое нечетное*** число, то поступают следующим образом: отделяют от тригонометрической функции ***в нечетной степени*** первую степень и вносят ее под знак дифференциала. Оставшуюся четную степень тригонометрической функции преобразуют с использованием формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

<u>Пример 2 .</u> Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$.

Решение: здесь $\alpha = 3$ - положительное нечетное число. Следовательно,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} = = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \right| =$$

$$-\int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\int t^{-\frac{2}{3}} dt + \int t^{\frac{4}{3}} dt = -\frac{t^{\frac{1}{3}}}{1/3} + \frac{t^{\frac{7}{3}}}{7/3} + C =$$

$$= -3\sqrt[3]{\cos x} + \frac{3}{7}\cos^2 x \sqrt[3]{\cos x} + C.$$

<u>Пример 3.</u> Вычислить интеграл $\int \cos^5 x\, dx$.

Решение: запишем $\cos^5 x = \cos^4 x \cdot \cos x = \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x$.

Тогда:

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{array} \right| = \int \left(1-t^2\right)^2 dt =$$

$$= \int \left(1 - 2t^2 + t^4\right)dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

<u>Второй случай.</u> Если α и β - ***четные неотрицательные числа***, то степени синуса и косинуса понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

<u>Пример 4.</u> Вычислить интеграл $\int \cos^4 x\, dx$.

Решение: запишем

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right).$$

Следовательно,

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int \frac{3}{2}dx + \int \cos 2x\,d(2x) + \frac{1}{2\cdot 4}\int \cos 4x\,d(4x)\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C}}\,.$$

III. Вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Запись $R(\sin x, \cos x)$ означает, что над синусом и косинусом производятся только рациональные операции: сложение, вычитание, умножение на постоянные величины, возведение в целые степени, как положительные, так и отрицательные, деление.

Интегралы этого вида приводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}} \qquad (-\pi < x < \pi),$$

которая называется **универсальной тригонометрической подстановкой**. В этом случае $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg}x$ выражаются рационально через новую переменную t (по известным тригонометрическим формулам) следующим образом:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad \operatorname{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}.}$$

Кроме того $\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$

(из $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ следует, что $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, $(-\pi < x < \pi)$,

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}).$$

<u>Пример 1.</u> Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

Решение: полагаем $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{6t}{1+t^2} + 5\right)\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3} + C.$$

<u>Замечание 1.</u> По возможности надо избегать применения универсальной подстановки, т.к. она может приводить к громоздким вычислениям.

<u>Замечание 2.</u> Если под интегралом $\sin x$ ***и*** $\cos x$ ***содержатся только в четных степенях, то удобнее использовать подстановку*** $t = \operatorname{tg} x$.

<u>Пример 2.</u> Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1 - 5\sin^2 x}$.

Решение: разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и используя подстановку

$t = \operatorname{tg} x$ (тогда $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$), получим:

$$\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 5tg^2 x} = \left[\frac{1}{\cos^2 x} = tg^2 x + 1 \right] =$$

$$= \int \frac{dtgx}{tg^2 x + 1 - 5tg^2 x} = \int \frac{dt}{1-4t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d2t}{1-(2t)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2tgx}{1-2tgx}\right| + C.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

	<u>Задание.</u> ***Вычислить интегралы***	***Ответы***
1.	$\int \sin 3x \sin 5x\, dx$	$\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$
2.	$\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx$	$-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$
3.	$\int \sin^3 x\, dx$	$-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$
4.	$\int \cos^2 x \sin^3 x\, dx$	$\frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{3}\cos 3x - 2\cos x\right) + C$
5.	$\int tg^3 x\, dx$	$\frac{1}{2}tg^2 x + \ln\lvert\cos x\rvert + C$
6.	$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$	$2\sqrt{\sin x}\left(1 - \frac{1}{5}\sin^2 x\right) + C$

	Задание. ***Вычислить интегралы***	***Ответы***
7.	$\int \sin^2 x\, dx$	$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$
8.	$\int \cos^2 2x\, dx$	$\frac{1}{4}\left(2x + \frac{1}{2}\sin 4x\right) + C$
9.	$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$	$\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$
10.	$\int \frac{dx}{\sin x}$	$\ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{x}{2} \right\rvert + C$
11.	$\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$	$\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C$
12.	$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$	$\frac{1}{5}\ln\left\lvert \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 2} \right\rvert + C$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Комплексные числа в алгебраической форме. Действия с комплексными числами в алгебраической форме.
2. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Аргумент, модуль комплексного числа.
3. Формула Эйлера. Показательная форма записи комплексного числа.
4. Алгебраические действия с комплексными числами в тригонометрической форме.
5. Дайте определение первообразной для некоторой функции $\mathbf{f(x)}$ на промежутке $\mathbf{(a,b)}$.
6. Определение неопределенного интеграла. Чем отличается неопределенный интеграл от функции $\mathbf{f(x)}$ от своих первообразных?
7. Основные свойства неопределенного интеграла.
8. Можно ли считать операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратными?
9. Запишите формулу интегрирования по частям.
10. Основная теорема алгебры о разложимости многочлена на множители.
11. Дайте определение простого (кратного) корня многочлена $\mathbf{P_n(x)}$.
12. Правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие в случае различных действительных корней знаменателя.
13. Правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие в случае кратных действительных корней знаменателя
14. Правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие в случае простых комплексно-сопряженных корней знаменателя.

15. Правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие в случае кратных комплексно-сопряженных корней знаменателя.

16. Методы вычисления интегралов $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x dx$ в зависимости от α и β

17. Интегрирование произведений тригонометрических функций: $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x, \quad \sin \alpha x \cdot \sin \beta x, \quad \cos \alpha x \cdot \cos \beta x.$

18. Интегрирование рациональных функций от $\sin x, \quad \cos x.$

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

№	Задание	Варианты ответов			
1.	Произведение чисел $\mathbf{z_1 = 4 - 2i}$ и $\mathbf{z_2 = 2 + 3i}$ равно	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
		$\mathbf{-14 + 8i}$	$\underline{\underline{\mathbf{14 + 8i}}}$	$\mathbf{14 - 8i}$	$\mathbf{-14 - 8i}$
2.	Тригонометрическая форма записи комплексного числа $\mathbf{z = -2 - 2i}$	**A)** $2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$		**B)** $2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4} + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$	
		C) $2\sqrt{2}\left(\sin\frac{5\pi}{4} + i\cos\frac{5\pi}{4}\right)$		**D)** $\underline{\underline{2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}}$	
3.	Одна из первообразных для функции $\mathbf{f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}}$ равна	$\underline{\underline{8\sqrt{x}}}$	$4\sqrt{x}$	$\frac{4}{2x\sqrt{x}}$	$\frac{8}{\sqrt{x^3}}$
4.	Семейство функций $\mathbf{F(x) = \cos x + c}$ есть результат вычисления интеграла	$\int \sin x\,dx$	$\int \cos x\,dx$	$\underline{\underline{-\int \sin x\,dx}}$	$-\int \cos x\,dx$

5.	Значение интеграла $\int e^{-2x}dx$ равно	$\underline{-\frac{1}{2}e^{-2x}+c}$	$\frac{1}{2}e^{-2x}+c$	$-2e^{-2x}+c$	$e^{-2x}+c$
6.	Табличный интеграл $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ равен	$\arcsin\frac{x}{a}+c$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+c$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\right\rvert+c$	$\underline{\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c}$
7.	Результат вычисления интеграла $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x}dx$ равен	$-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}x^{-3/2}+c$	$\underline{\ln\lvert x\rvert+2\sqrt{x}+c}$	$\frac{x+\frac{1}{2}x^{3/2}}{x^2}+c$	$\ln\lvert x\rvert+\frac{2}{\sqrt{x}}+c$
8.	Интеграл $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ следует вычислять методом	Интегрирования по частям	Выделения полного квадрата	Разложением на простейшие дроби	Разбиением на сумму табличных интегралов
9.	Сумма $(A+B+C)$, где A, B, C - коэффициенты в разложении дроби $\frac{x+3}{(x-1)^2(x+2)}$ на простейшие, равна	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\underline{\frac{4}{3}}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Задание 1. Найти неопределенный интеграл методом подведения некоторой функции под знак дифференциала

Вариант 0	Вариант 1
$\int (3x+5)^9 dx$	$\int e^{\frac{x}{2}+5} dx$
Вариант 2	**Вариант 3**
$\int \sqrt[4]{2x-1}dx$	$\int \frac{x^2 dx}{x^3-1}$
Вариант 4	**Вариант 5**
$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+5x}}$	$\int e^{-x^2} x\,dx$
Вариант 6	**Вариант 7**
$\int \cos(2x-1)dx$	$\int \mathrm{tg}(2-x)dx$
Вариант 8	**Вариант 9**
$\int \frac{dx}{\sin^2(3x+1)}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$

Задание 2. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям

Вариант 0	Вариант 1
$\int (2x-1)\cos x\,dx$	$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 2x}$
Вариант 2	**Вариант 3**
$\int \mathrm{arctg}\, x\,dx$	$\int \sqrt{x} \ln x\,dx$
Вариант 4	**Вариант 5**
$\int (1-x) \sin 2x\,dx$	$\int (3-4x)\sin x\,dx$
Вариант 6	**Вариант 7**
$\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}}$	$\int (2x-3)e^{-x}dx$
Вариант 8	**Вариант 9**
$\int (1-2x)e^{2x}dx$	$\int (2-3x)\cos 2x\,dx$

Задание 3. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной

Вариант 0	Вариант 1
1. $\int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}dx$	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-3x^3}}$
Вариант 2	**Вариант 3**
2. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$	$\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^2 2x+3}$
Вариант 4	**Вариант 5**
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$	$\int \sqrt[3]{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^2dx$
Вариант 6	**Вариант 7**
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$
Вариант 8	**Вариант 9**
5. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$	10. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

Задание 4. Разложить дробь на простейшие дроби и найти все неопределенные коэффициенты

Вариант 0	Вариант 1
$\frac{x^2+6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}$	$\frac{1}{x(x^2+16)}$
Вариант 2	**Вариант 3**
$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}$	$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+2)}$
Вариант 4	**Вариант 5**
$\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}$	$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$
Вариант 6	**Вариант 7**
$\frac{x-3}{x^4+4x^2}$	$\frac{1}{x^4-1}$
Вариант 8	**Вариант 9**
$\frac{x}{x^3-1}$	$\frac{8x-15}{x(x^2-4x+5)}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1. – М.: Наука, 1978 – 1996
2. Щипачев В.С. Курс высшей атематики. Т.1. – М.:Изд. МГУ, 1981.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.:Наука, 1971.
4. Сборник задач по математике для втузов/ Под редакцией А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича. – М.:Наука, 1981.

СОДЕРЖАНИЕ