ОДО

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА и АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы. Основные типы матриц. Действия с матрицами

1.1.1. Прямоугольные матрицы

Определение. Прямоугольная ***таблица*** чисел (или иных математических выражений), содержащая **m** строк и **n** столбцов называется, ***матрицей размерности*** $m \times n$.

Будем обозначать матрицы прописными буквами **A, B, C** и т.д. В общем случае матрица **A** размерности $m \times n$ записывается так

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{сокращенно} \quad A_{m\times n} = (a_{ij}),$$

где числа a_{ij} - элементы матрицы. Первый индекс (i) – указывает номер строки, второй (j) – номер столбца, в которых расположен названный элемент, т.е. a_{ij} - элементы матрицы, стоящие на пересечении i строки и j столбца, где $i = 1,2,\dots, m$, $j = 1,2,\dots, n$

Примеры:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ - матрица размерности 2×2;

её элементы равны: $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = -1.$

2) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & tg\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & ctg\alpha \end{pmatrix}$- матрица размерности 2×3.

Определение: ***Матрица-строка*** – это матрица размерности $1\times n$ $(m = 1)$.

Определение: ***Матрица-столбец*** – это матрица размерности $m\times 1$ $(n = 1)$.

Примеры:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$- *матрица-строка* размерности 1×3

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ - *матрица-столбец* размерности 4×1

Определение: ***Две матрицы*** A и B ***называются равными***, если они имеют ***одинаковые размерности*** и если равны элементы, стоящие на одинаковых местах $(a_{ij} = в_{ij},\ \forall i, j)$.

Определение: ***Матрица*** A^T ***называется транспонированной*** к матрице A, если **строками** матрицы A^T являются **столбцы** матрицы A. Размерность матрицы A^T - $n \times m$.

Таким образом транспонировать матрицу – это значит заменить строки столбцами

<u>Пример:</u>

1) $B=\begin{pmatrix} 1 & 45 & 30 \\ 3 & 35 & 20 \\ 5 & 25 & 10 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad B^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 45 & 35 & 25 \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad A^T=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

<u>Определение:.</u> ***<u>Нулевой</u>*** называется матрица, **все** элементы которой равны **нулю**.

1.1.2. Квадратные матрицы

<u>Определение.</u> ***<u>Квадратной матрицей</u>*** размерности (порядка) **n** называется матрица, число строк которой равно числу столбцов (**n=m**).

<u>Пример:</u> $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица второго порядка.

<u>Главной диагональю</u> квадратной матрицы называется множество всех её элементов, расположенных на отрезке, соединяющем левый верхний угол матрицы с правым нижним.

<u>Побочной диагональю</u> – множество элементов, которые лежат на отрезке, соединяющем её левый нижний угол с верхним правым.

главная диагональ $\qquad\qquad$ ***побочная диагональ***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

<u>Определение</u>*: <u>Единичной матрицей</u>* называется квадратная матрица, каждый элемент главной диагонали которой равен единице, а остальные элементы равны нулю (обозначается Е).

<u>Пример:</u> $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

<u>Определение</u>. ***<u>Треугольная матрица</u>*** – это квадратная матрица, все элементы которой, стоящие над или под главной диагональю, равны нулю.

треугольная снизу $\qquad\qquad$ ***треугольная сверху***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.1.3. Действия с матрицами

С матрицами (таблицами) можно производить следующие действия: умножать матрицы на число, складывать матрицы одинаковой размерности, перемножать матрицы.

Определение: ***Суммой матриц*** A и B ***одинаковой размерности*** называется матрица C (записывают $C = A + B$) той же размерности, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$.

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 0+1 \\ 2-2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение: ***Произведением матрицы*** A на число λ называется матрица B (записывают $B = \lambda A$) той же размерности, что и матрица A, причем $в_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i, j$.

Пример: Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, а число $\lambda = 2$. Тогда матрица

$$B = \lambda A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Определение: ***Произведением матрицы*** A размерности $m \times n$ ***на матрицу*** B размерности $n \times k$ называют матрицу С размерности $m \times k$ (записывают $C = A \cdot B$), каждый элемент которой c_{ij} находится по формуле $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$

Правило нахождения элемента c_{ij} нетрудно запомнить: берется i строка матрицы A (первого сомножителя) и j столбец матрицы B (второго сомножителя) и каждый элемент строки a_{ik} $(k = 1,2,\ldots, n)$ умножается на соответствующий элемент столбца b_{kj} $(k = 1,2,\ldots, n)$, и все такие произведения складываются (принцип «строка на столбец»).

Заметим, что число столбцов первого сомножителя (A) равно числу строк второго сомножителя (B).

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$

$$1)\quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot2+1\cdot3 & 1\cdot4+2\cdot5+1\cdot6 \\ 3\cdot1+5\cdot2+4\cdot3 & 3\cdot4+5\cdot5+4\cdot6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 27 & 61 \end{pmatrix}$$

$$2)\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\3&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+4\cdot3&1\cdot2+4\cdot5&1\cdot1+4\cdot4\\2\cdot1+5\cdot3&2\cdot2+5\cdot5&2\cdot1+5\cdot4\\3\cdot1+6\cdot3&3\cdot2+6\cdot5&3\cdot1+6\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&22&17\\17&29&22\\21&36&27\end{pmatrix}.$$

Таким образом получилось, что $A\cdot B\neq B\cdot A$

Замечание. *Менять матрицы в произведении местами нельзя, т.к. может измениться результирующая матриц. Кроме того, часто бывает так, что произведение матриц* AB *определено, а произведение матриц* BA *нет.*

1.1.4. Свойства операций над матрицами

а). Свойства сложения матриц

1°. $A+B=B+A$ – переместительное свойство.

2°. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – сочетательное свойство.

б). Свойства умножения матрицы на число

1°. $\lambda(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$ - распределительное свойство относительно сложения матриц

2°. $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$ - распределительное свойство относительно сложения чисел

3°. $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)\cdot A$ - сочетательное свойство

где λ, μ - произвольные числа

в). Свойства умножения матриц

1°. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ - сочетательное свойство

2°. $\begin{matrix}(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C\\ A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C\end{matrix}$ - распределительное свойство

1.2. Элементы теории определителей

1.2.1. Основные понятия и обозначения

Определитель матрицы $A_{n\times n}$ – это некоторое число, которое ставится в соответствие (по определенным правилам) каждой квадратной матрице и обозначается

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\qquad |A|,\qquad \Delta.$$

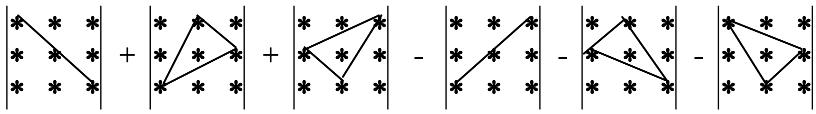
Определение: ***Определителем 2-ого порядка*** квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ называется число $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$

Пример. Найти определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 5$

Определение : ***Определителем 3-его порядка*** квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число, равное $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Здесь $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

или по схеме: 

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 2 \\ 4 & 15 & 1 \end{pmatrix}$

Решение $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 2 \\ 4 & 15 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 40 + 120 - 160 - 30 - 10 = -30.$

Определение : ***Минором M_{ij} элемента a_{ij}*** определителя n–го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием i строки и j столбца.

Определение : ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} элемента a_{ij} называется число, определяемое формулой $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Пример: Найти минор и алгебраическое дополнение элемента a_{12} определителя

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

.**Решение.** $M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6;$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \cdot (-6) = 6.$$

Утверждение *(разложение определителя по элементам строки или столбца)* – **всякий определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения.**

Разложение определителя по элементам i - ой строки $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$

Это утверждение позволяет вычислять определители любого порядка, сводя их вычисление к вычислению определителей меньшего на единицу порядка.

Пример. Вычислить определитель матрицы A разложением по элементам 1-ого столбца.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 4 \cdot (2 \cdot 9 - 8 \cdot 3) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) =$$

$$= 1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-6) + 7 \cdot (-3) = -3 + 24 - 21 = 0$$

1.2.2. Свойства определителей

1°. При транспонировании, т.е. при замене строк столбцами с сохранением порядка их следования, величина определителя не меняется. (Это свойство означает равноправность строк и столбцов).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2°.Если две строки (столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Следствие свойства 2° - определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

3°.Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножится на это число.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Следствие свойства 3° - если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

4°.Если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы какой-либо другой строки (столбца), умноженные на произвольное число, то определитель не изменится.

5°.Определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

1.3. Обратная матрица. Правило нахождения обратной матрицы A^{-1}

Определение : ***Матрицей, обратной к матрице А***, называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (E – единичная матрица).

Замечание 1 – если A^{-1} существует, то она единственная.
Замечание 2 – если матрица A не квадратная, то A^{-1} не существует.

Сформулируем правило нахождения обратной матрицы A^{-1}**.**

Пусть дана квадратная матрица $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Найдем определитель матрицы A $(\det A)$.

Если $\det A \neq 0$, то матрица A называется ***невырожденной***, и обратная матрица A^{-1} существует (в противном случае A - ***вырожденная***. Обратной матрицы нет).

2. Найдем матрицу, составленную из алгебраических дополнений A_{ij} ко всем элементам a_{ij} матрицы A

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Транспонируем её (получающуюся матрицу обычно обозначают $\tilde{A}$ и называют присоединенной матрицей)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Найдем матрицу. $$A^{-1}=\frac{1}{\det}\cdot\tilde{A}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

Можно непосредственным вычислением проверить, что
$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Пример. Найти обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 0 \end{pmatrix}$

Решение.

1) Найдем определитель матрицы A разложением по элементам третьего столбца

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 0 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot(32-35)+6\cdot(-8+14)=27$$

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - (-8)(-6) = -48$$

$$A_{12} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(0-(-42)) = -42$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3$$

$$A_{21} = -24 \qquad A_{22} = -21 \qquad A_{23} = -6$$

$$A_{31} = -3 \qquad A_{32} = -6 \qquad A_{33} = -3$$

Запишем присоединенную матрицу $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -48 & -24 & -3 \\ -42 & -21 & -6 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

3) Найдем матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} -48 & -24 & -3 \\ -42 & -21 & -6 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$, т.е. что эта матрица является обратной к матрице A

1.4. Ранг матрицы и его нахождение. Теорема Кронекера - Капелли

Рассмотрим произвольную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Определение : ***Минором к-ого порядка*** ($M_к$) матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов (не путать с минором M_{ij} элемента a_{ij}).

Пример. Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Минорами M_2 (второго порядка) будут, например, миноры $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ и т.д.

Определение : ***Рангом матрицы A*** (обозначим его $r(A)$)) называется **наибольший из**

порядков её миноров, отличных от нуля.

Следующие преобразования со строками (столбцами) матрицы A не меняют её ранга:

1) транспонирование матрицы
2) вычеркивание строки (столбца), все элементы которой равны нулю.
3) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
4) прибавление е элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).
5) перемена местами двух строк (столбцов).

Рассмотрим два метода нахождения ранга матрицы.

1.4.1. Метод окаймляющих миноров

1) Минор M_1 – это некоторый элемент a_{ij} матрицы A. Если матрица A не нулевая (т.е. не все её элементы равны нулю), то $r(A) \geq 1$.
2) Находим миноры M_2 второго порядка, содержащие $M_1 \neq 0$ (окаймляющие M_1) до тех пор, пока не найдется минор $M_2 \neq 0$. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$. Если есть, то $r(A) \geq 2$ и т.д.
3) .Находим миноры k-го порядка, окаймляющие M_{k-1}. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k-1$; если есть, то $r(A) \geq k$, и процесс продолжается.

Недостаток метода – в общем случае требуется вычисление большого числа определителей.

1.4.2. Приведение матрицы к ступенчатому виду

Определение : ***Элемент строки*** матрицы назовем ***крайним***, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю.

Определение : ***Матрица называется ступенчатой***, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

Теорема. Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.

Пусть задана система *m* линейных уравнений с ***n*** неизвестными $x_1, x_2, ... x_n$.

(1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где числа $a_{ij}\left(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}\right)$ – коэффициенты системы, $b_1, b_2, ..., b_m$ - свободные члены.

Замечание. Если все $b_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ равны нулю, то система называется ***однородной***, в противном случае – ***неоднородной***.

Если система (1) имеет хотя бы одно решение (набор $x_{10}, x_{20},...x_{n0}$, который обращает каждое уравнение системы в тождество), она называется ***совместной***; система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***.

Приведение матрицы к ступенчатому виду разберем на примере с помощью преобразований, не меняющих ранг.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

<u>I этап</u> – поставим первой ту строку, в которой крайний элемент расположен левее, или, по крайней мере, не правее, чем в остальных строках. Для этого поменяем местами I-ю и II-ю строки. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>II этап</u> – умножим I-ю строку на 5 и вычтем ее из III-ей строки, записав результат в III-ю строку. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & -10 & -30 \end{pmatrix}$$

(под крайним элементом I-ой строки все элементы равны нулю).

<u>III этап</u> – добиваемся этого же для крайнего элемента II-ой строки. Вычтем из III-ей строки II-ю, умноженную на 10. Получим ступенчатую матрицу, эквивалентную матрице A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.к. III-я строка нулевая, то ранг матрицы $r(A) = 2$.

Наряду с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрицей системы,

рассмотрим матрицу $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

A^* - расширенная матрица системы (к A добавлен столбец свободных членов).

Очевидно, что $r(A) \leq r(A^*)$.

1.4.3. Теорема Кронекера–Капелли (без доказательства)

<u>**Теорема:**</u> Система (1) <u>***совместна***</u> тогда и только тогда, когда $r(A) = r(A^*)$ - ранг матрицы A совпадает с рангом расширенной матрицы A^*

<u>***Следствия***</u>:

1) если $r(A) = r(A^*) = n$ (где n - количество неизвестных), то система (1) имеет единственное решение (система (1) называется определенной).
2) если $r(A) = r(A^*) < n$, то система (1) имеет бесчисленное множество решений),стема называется неопределенной).
3) если $r(A) < r(A^*)$, то система (1) не имеет решений, система называется несовместной)

1.5. Методы решения систем линейных уравнений

1.5.1. Правило Крамера

Рассмотрим правило Крамера для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

где коэффициенты $a_{ij}\ (i, j = 1,2,3)$ и свободные члены $b_i\ (i = 1,2,3)$ считаются заданными.

<u>Определение</u> : Тройка чисел (x_0, y_0, z_0)называется ***<u>решением системы</u>*** (1), если в результате подстановки их вместо x, y, z все три уравнения (1) обращаются в верные числовые равенства

Составим четыре определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ - главный определитель системы

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ получаются из главного определителя системы Δ заменой элементов, соответственно, первого, второго и третьего столбцов <u>столбцом свободных членов.</u>

<u>Правило Крамера</u>: Если главный определитель Δ системы (1) отличен от нуля, то существует, и притом единственное, решение этой системы (x_0, y_0, z_0), которое

$$\boxed{x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}}$$ **<u>формулы Крамера</u>**

<u>Замечание 1</u>. Если $\Delta = 0$,а хотя бы один из $\underline{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z}$ отличен от нуля, то система (1) не имеет решений.

<u>Замечание 2</u>. Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система (1) либо совсем не имеет решений, либо их бесчисленное множество.

<u>Пример</u>. Найти решение системы $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$ методом Крамера

<u>Решение:</u> Вычислим главный определитель Δ

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Вычислим определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33$$

Следовательно: $x_\circ = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{33}{33} = 1 \quad y_\circ = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{33}{33} = 1 \qquad z_\circ = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{33}{33} = 1$

<u>Ответ</u>: $x = 1;\ y = 1;\ z = 1$

1.5.2. Решение системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными матричным способом

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными.

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots x_n$ – неизвестные; $a_{ij}\left(i, j = 1,2,\ldots n\right)$ - коэффициенты при неизвестных; $b_1, b_2, \ldots b_n$ - свободные члены.

Решением (1) называется набор $x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0}$, который, будучи подставленным в систему (1) вместо соответствующих неизвестных, обращает каждое уравнение системы (1) в верное числовое равенство.

Выпишем три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ где}$$

A – матрица коэффициентов

X – матрица-столбец неизвестных

B – матрица-столбец свободных членов

Систему (1) можно записать в виде матричного уравнения

$$\text{(2)} \qquad A \cdot X = B$$

Матричное уравнение (2) можно решать по аналогии с решением линейного уравнения $ax = в \quad \left(x = a^{-1} \cdot в,\ если\, a \neq 0\right)$.

Решаем матричное уравнение (2). Для этого :

1) Находим обратную матрицу A^{-1} (если она существует)

2) Умножаем обе части уравнения (2) слева на матрицу A^{-1}

$$A \cdot X = B$$
$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$\underline{X = A^{-1} \cdot B}$$

Таким образом, зная обратную матрицу A^{-1}, можно найти матрицу - столбец неизвестных X

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+3y+z=2 \end{cases}$

<u>Решение</u>: Имеем $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) Вычислим определитель матрицы $A: \det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\dots=1$. $\det A=1\neq 0$

следовательно обратная матрица A^{-1} существует

2) Находим обратную матрицу A^{-1} (по выше сказанному правилу) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

3) Находим матрицу – столбец X

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Ответ</u>: $x=-1,\ y=1,\ z=0$

1.5.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений (на примерах)

<u>Пример</u>. Найти решение системы $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=5 \\ 3x_1+7x_2+6x_3=5 \end{cases}$

<u>Решение</u>. Запишем расширенную матрицу системы и приведем её к ступенчатому виду преобразованиями строк не меняющими ранга матрицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ III-3\cdot I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}+\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Отсюда видно, что $r(A)=r(A^*)=3$, где 3 – количество неизвестных. Значит, система имеет единственное решение. Для его нахождения запишем систему уравнений, эквивалентную исходной

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \quad x_3 = 1 \\ \quad\; - x_2 + 2x_3 = 3 \\ \qquad\qquad 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Отсюда (из III-его уравнения) получим $x_3 = 1$. Подставив $x_3 = 1$ во второе уравнение, находим, что $x_2 = -1$. Подставляя $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ в I-е уравнение, получаем $x_1 = 2$,

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

<u>Замечание</u>. Однородная система уравнений всегда совместна, т.к. всегда имеется решение $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ и $r(A) = r(A^*)$. Решения, отличные от нулевого, есть только в том случае, если $r(A) = r(A^*) < n$ (n - число переменных).

<u>Пример</u>. Найти решения системы уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

<u>Решение.</u> Приведем матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 3\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Крайние элементы каждой строки, соответствующие переменным x_1, x_2, x_3, назовем **<u>базисными</u>**; оставшиеся переменные (в нашем случае x_4) назовем **<u>свободными</u>**.

Запишем полученную систему, перенеся x_4 в правую часть, в виде $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -x_4 \\ 5x_2 - 5x_3 = 6x_4 \\ 3x_3 = -x_4 \end{cases}$

Пусть $x_4 = t$, тогда $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -t \\ 5x_2 - 5x_3 = 6t \\ 3x_3 = -t \end{cases}$

Матрица этой системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ имеет диагональный вид и $r(A) = 3 = r(A^*)$.

Следовательно, последняя система имеет единственное решение $\left(\frac{8}{15}t;\ \frac{13}{15}t; -\frac{1}{3}t\right)$

(легко проверить). Тогда исходная система (ей эквивалентная) имеет бесчисленное множество решений $\left(\frac{8}{15}t;\ \frac{13}{15}t; -\frac{1}{3}t; t\right)$ t – произвольное.

<u>Ответ</u>: $x = 1;\ y = 1;\ z = 1$

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Понятие вектора

Рассматривая различные физические процессы, мы встречаемся с объектами и величинами разной природы. Одни величины характеризуются числом- они называются скалярными величинами или скалярами. Другие величины характеризуются еще и направлением в пространстве (например сила $\vec{F}$, скорость $\vec{v}$, и т.д.). для таких величин вводится понятие вектора.

Определение. Геометрическим вектором или просто ***вектором*** называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с началом A и концом B и обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$

Определение. ***Длиной или модулем вектора*** $\overrightarrow{AB}$ называется **длина** отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$

Определение. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется ***нулевым,*** обозначается $\bar{0}$ и длина этого вектора равна нулю $\left|\vec{0}\right| = 0$

Если поменять местами роли начала и конца вектора, то получим вектор $\overrightarrow{BA}$ противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$, причем $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$

Определение. Векторы называются ***коллинеарными,*** если они параллельны одной прямой

Замечание : *нулевой вектор коллинеарен любому вектору, т.к. направление его не определено.*

Определение: **В**екторы называются ***компланарными,*** если они параллельны одной плоскости (здесь речь идет о трех и более векторах)

Определение. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными ,*** если они

1) параллельны одной прямой
2) одинаково направлены
3) равны по длине

$$\vec{a} = \vec{b}$$

2.2. Линейные операции над векторами. Свойства линейных операций

Над векторами можно проводить следующие линейные операции:

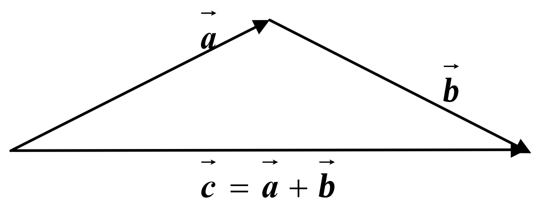
– сложение векторов
– вычитание векторов
– умножение вектора на число

.

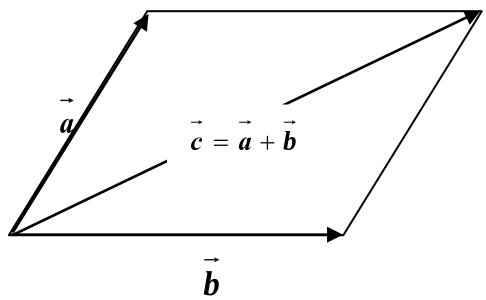
Сложение векторов.

Складывать вектора можно по правилу треугольника и по правилу параллелограмма

<u>Определение:</u> <u>***суммой двух векторов***</u> $\vec{a}+\vec{b}$ (вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$) называется вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец с концом вектора $\vec{b}$ <u>***(правило треугольника***</u>)

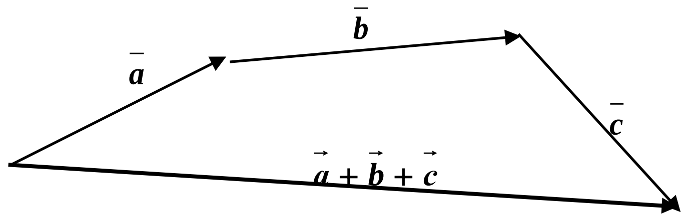


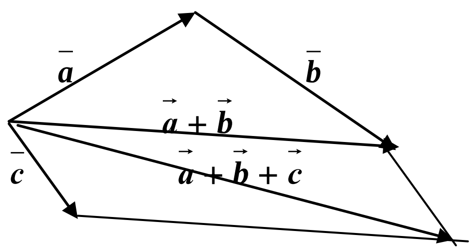
<u>Определение:</u> <u>***суммой двух векторов***</u> $\vec{a}+\vec{b}$, имеющих общее начало, называется вектор $\vec{c}$, совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и имеющего общее начало с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ <u>***(правило параллелограмма)***</u>



<u>***Замечание:***</u> определив сумму двух векторов можно найти сумму любого количества векторов.

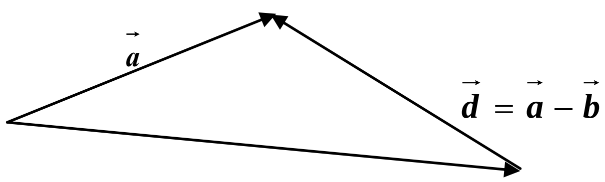
<u>Пример:</u> найти сумму векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$





- <u>***Вычитание векторов***</u> ***(операция, обратная операции сложения)***

<u>Определение:</u> <u>***разностью двух векторов***</u> $\vec{a}-\vec{b}$, называется вектор $\vec{d}$, который в сумме с $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, т. е $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ или $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$



$\bar{b}$

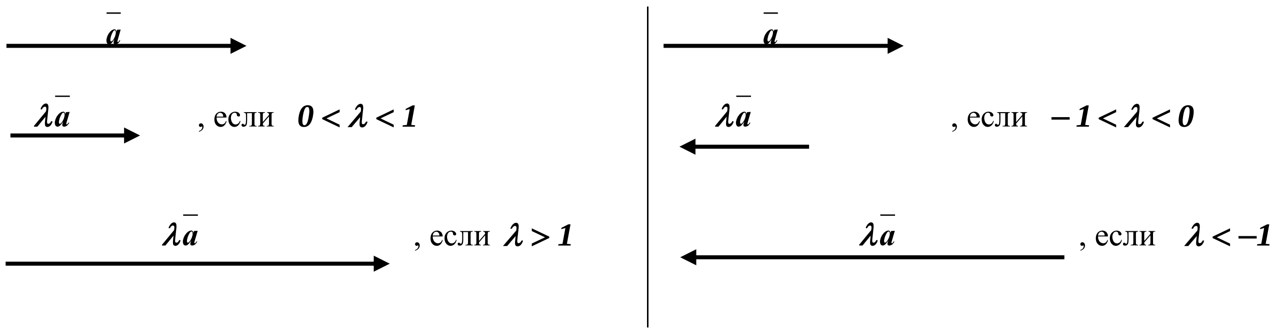
- ***<u>Умножение вектора на число.</u>***

<u>Определение:</u> ***<u>произведением вектора</u>*** $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, который удовлетворяет следующим условиям:

- коллинеарен вектору $\vec{a}$
- имеет длину $\left|\lambda\vec{a}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$
- сонаправлен вектору $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно направлен, если $\lambda < 0$

<u>Геометрический смысл</u> операции умножения вектора $\vec{a}$ на число заключается в следующем:

- если $|\lambda| > 1$, то при умножении вектора $\vec{a}$ на число λ, вектор $\vec{a}$ растягивается в λ раз
- если $|\lambda| < 1$, то при умножении вектора $\vec{a}$ на число λ, вектор $\vec{a}$ сжимается в λ раз



Признак коллинеарности векторов *Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *является существование такого числа* λ, *которое удовлетворяет равенству* $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, *причем* $\lambda = \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$

<u>Перечислим свойства линейных операций над векторами :</u>

1. Коммутативность $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. Ассоциативность $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
3. Дистрибутивность относительно суммы чисел $(\lambda + \beta) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
4. Дистрибутивность относительно суммы векторов $\lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

2.3. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

<u>Определение</u>: ***<u>Линейной комбинацией</u>*** векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \cdots, \overline{a_n}$ называется сумма $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3} + \cdots + \lambda_n\overline{a_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ - произвольные n-чисел

<u>Определение</u>: ***<u>Совокупность векторов</u>*** $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \cdots, \overline{a_n}$ называется ***<u>линейной зависимой</u>***, если существуют числа, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ из которых **хотя бы одно отлично от нуля**, такие, что $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3} + \cdots + \lambda_n\overline{a_n} = 0$ или, что то же самое, если хотя бы один из векторов может быть выражен как линейная комбинация остальных, т.е. $\overline{a_n} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3} + \cdots + \lambda_{n-1}\overline{a_{n-1}}$. Если же линейная комбинация $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3} + \cdots + \lambda_n\overline{a_n} = 0$ обращается в нуль только при $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \cdots, \lambda_n = 0$, то векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \cdots, \overline{a_n}$ ***<u>линейно независимы</u>***.

<u>Примеры:</u>

1) Два геометрических вектора на плоскости линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны (параллельны)
2) Три геометрических вектора в пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны (параллельны одной плоскости)
3) Четыре геометрических вектора в пространстве **<u>всегда</u>** линейно зависимы.

2.4. Базис. Разложение по базису. Декартова система координат

<u>Определение</u> : **Б*<u>азисом на плоскости</u>*** называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}$

<u>Определение</u> : Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ называется ***<u>базисом в пространстве.</u>***

<u>Теорема</u> : Любой вектор на плоскости (в пространстве) может быть представлен как линейная комбинация базисных векторов и такое представление единственно

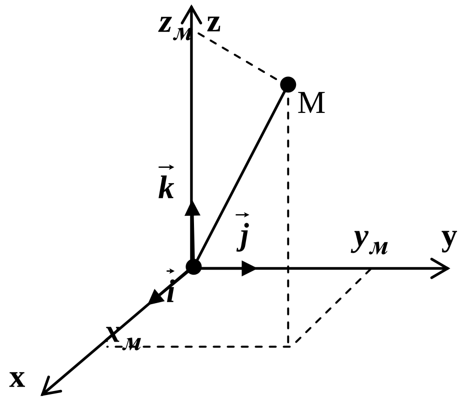
$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} \qquad \left(\vec{a} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}\right)$$

Числа λ_1, λ_2 $\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$ называются координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ $\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)$

<u>Определение</u> : ***<u>Декартова система координат</u>*** в пространстве – это совокупность точки O в пространстве и базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, где точка O – начало координат

Прямые, проходящие через O в направлении базисных векторов называются осями координат.

Рассмотрим известную вам ***<u>прямоугольную</u>*** декартову систему координат OXYZ.



В этой декартовой системе координат

O – начало координат

OX – ось абсцисс ; OY – ось ординат ;

OZ – ось аппликат

XOY ; XOZ ; YOZ – координатные плоскости

Базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ в этом случае ***ортонормирован***, т.е. его векторы взаимноперпендикулярны и их длины равны 1. Ортонормированный базис обозначают соответственно $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$.

Рассмотрим в этой системе координат точку M. Каждой точке соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$, который называется ***радиус – вектором*** точки M. По теореме о разложении вектора следует, что существует единственное разложение вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k} \qquad \text{или} \qquad \overrightarrow{OM} = \{x_M; y_M; z_M\}$$

где $\{x_M; y_M; z_M\}$ координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$

Определение : ***Координатами точки*** M в прямоугольной системе координат называются координаты её радиус – вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. $M(x_м; y_м; z_м)$, где x_M - *абсцисса* точки М, y_M - *ордината* точки М, z_M - *аппликата* точки М

2.5. Действия над векторами, заданными своими координатами

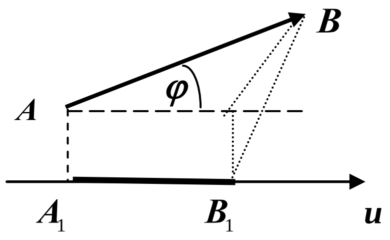
Пусть заданы векторы $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$

$\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$

Тогда

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = \{x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2\}$
2. $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$
3. $\bar{a} = \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$
4. Если $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, то $\boxed{\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}}$ — это **условие коллинеарности векторов**
5. Для того, чтобы получить координаты вектора $\overline{AB}$, у которого известны координаты начальной точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и конечной точки $B(x_2, y_2, z_2)$, надо из координат конечной точки вычесть соответствующие координаты начальной, т.е.
$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$
6. Если точка С середина вектора $\overline{AB}$, то координаты точки С равны
$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$
7. Зная координаты вектора можно найти его ***длину*** $\quad |\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

Определение *: Проекцией вектора* $\overline{AB}$ на ось u называется число, равное длине вектора $\overline{A_1B_1}$ этой оси, взятое со знаком «+», если направление $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси и со знаком «-», если эти направления противоположны, где A_1 - проекция точки A, а B_1 - проекция точки B на ось u, т.е. $\quad пр_u\overline{AB} = \pm|\overline{A_1B_1}|$



Теорема : ***Проекция вектора*** $\overline{AB}$ ***на ось равна*** произведению длины этого вектора на косинус угла φ между осью и вектором $\overline{AB}$ $\qquad np_u\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi$

2.6. Направление вектора

Рассмотрим произвольную точку М в декартовой системе координат и радиус – вектор $\overrightarrow{OM}$.
Найдем координаты точки **М** $(x_M\,;\,y_M\,;\,z_M)$ как проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на координатные оси.
Пусть α, β, γ углы, образованные вектором $\overline{OM}$ с положительным направлением осей координат. Тогда

$$x_м = \left|\overline{OM}\right| \cdot \cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{x_м}{\left|\overline{OM}\right|} = \frac{x_м}{\sqrt{x_м^2 + y_м^2 + z_м^2}}$$

$$y_м = \left|\overline{OM}\right| \cdot \cos\beta \qquad \cos\beta = \frac{y_м}{\left|\overline{OM}\right|} = \frac{y_м}{\sqrt{x_м^2 + y_м^2 + z_м^2}}$$

$$z_м = \left|\overline{OM}\right| \cdot \cos\gamma \qquad \cos\gamma = \frac{z_м}{\left|\overline{OM}\right|} = \frac{z_м}{\sqrt{x_м^2 + y_м^2 + z_м^2}}$$

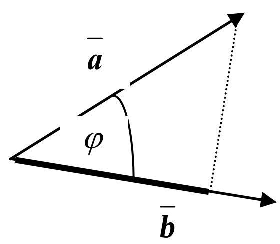
$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\overrightarrow{OM}$.
$\left(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 \right)$

2.7. Нелинейные операции над векторами.

2.7.1. Скалярное произведение двух векторов

Определение *:* ***Скалярным произведением*** двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число (скаляр) равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними $\bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\alpha$ где α - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Если воспользоваться понятием проекции вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ $\left(np_{\bar{b}}\bar{a} \right)$, то скалярное произведение можно записать следующим образом $\bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\bar{b}\right| \cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$



<u>Свойства скалярного произведения:</u>

1. Коммутативность $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. Ассоциативность $\lambda \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \left(\lambda \cdot \vec{a}\right)$

3. Дистрибутивность $\vec{a} \cdot \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \vec{a} \cdot \bar{b} + \vec{a} \cdot \bar{c}$

4. $\bar{a} \cdot \bar{a} = \left|\bar{a}\right|^2 = \bar{a}^2$ скалярный квадрат вектора $\bar{a}$

5. Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то косинус угла между векторами равен нулю $\Rightarrow$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

<u>Скалярное произведение векторов, заданных координатами</u> :

<u>Теорема.</u>	Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = \left\{x_1, y_1, z_1\right\} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}$ $\bar{b} = \left\{x_2, y_2, z_2\right\} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$, то их скалярное произведение равно **сумме произведений одноименных координат** $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Следствие 1..Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является равенство $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$

Следствие 2. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется равенством

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

Т.к. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\alpha$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right|} = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

<u>Пример.</u> Даны три точки $A\left(1,1,1\right)$, $B\left(2,2,1\right)$, $C\left(2,1,2\right)$. Найти угол $\angle BAC$

<u>Решение.</u> $\angle BAC$ - это угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Для того, чтобы вычислить угол между этими векторами найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

$\overline{AB} = \left\{2-1, 2-1, 1-1\right\} = \left\{1, 1, 0\right\}$

$\overline{AC} = \left\{2-1, 1-1, 2-1\right\} = \left\{1, 0, 1\right\}$

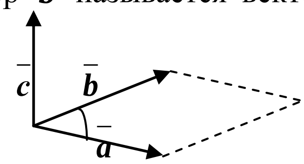
Тогда $\cos BAC = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|} = \dfrac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\angle BAC = 60^{\circ}$

<u>Ответ.</u> $\angle BAC = 60^{\circ}$.

2.7.2. Векторное произведение двух векторов

Определение . ***<u>Векторным произведением</u>*** вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ который определяется следующими условиями:



1) $\left|\bar{c}\right| = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \sin\alpha$
2) $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$
3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку векторов, т.е. из конца вектора $\bar{c}$ поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ по кратчайшему пути виден против часовой стрелки

Векторное произведение через координаты векторов $\bar{a} = \{ x_a, y_a, z_a \}$ и $\bar{b} = \{ x_b, y_b, z_b \}$ выражается следующим образом

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} \qquad \text{или} \qquad \bar{a} \times \bar{b} = \{ y_a z_b - y_b z_a ;\, x_b z_a - x_a z_b ;\, x_a y_b - x_b y_a \}$$

<u>Алгебраические свойства векторного произведения</u>

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

2) $\left(\lambda\bar{a}\right) \times \bar{b} = \lambda\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \bar{a} \times \left(\lambda\bar{b}\right)$

3) $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$

4) $\bar{a} \times \bar{a} = 0$

При векторном умножении одноименных базисных векторов получим **0**, а при : векторном умножении разноименных базисных векторов получим третий базисный вектор с определённым знаком.

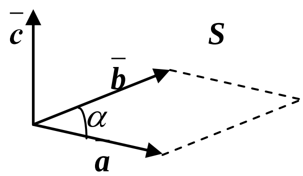
$\bar{i} \times \bar{i} = 0$ $\qquad$ $\bar{j} \times \bar{j} = 0$ $\qquad$ $\bar{k} \times \bar{k} = 0$

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$ $\qquad$ $\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$ $\qquad$ $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$

$\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$ $\qquad$ $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$ $\qquad$ $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$

<u>Геометрическое свойство векторного произведения.</u>

Длина (модуль) векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведенных к общему началу



$$\boxed{S = \left|\bar{c}\right| = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \sin\alpha}$$

2.7.3. Смешанное произведение трех векторов

Определение . ***Смешанным произведением*** трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$, т.е. $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$

Зная координаты векторов $\bar{a}=\{x_a, y_a, z_a\}$, $\bar{b}=\{x_b, y_b, z_b\}$, $\bar{c}=\{x_c, y_c, z_c\}$ смешанное произведение трех векторов можно вычислить следующим образом

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Алгебраическое свойство векторного произведения $\bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{c}$

(поэтому пишут просто $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$)

Геометрическое свойство смешанного произведения

Модуль смешанного произведения $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ равен объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, причём

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{cases} V_{пар}, \text{ если } \bar{a}, \bar{в}, \bar{c} - \text{правая тройка векторов} \\ -V_{пар}, \text{ если } \bar{a}, \bar{в}, \bar{c} - \text{левая тройка векторов} \\ 0, \text{ если } \bar{a}, \bar{в}, \bar{c} - \text{компланарны} \end{cases}$$

Замечание: ***Необходимым и достаточным условием компланарности*** трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения, т.е. $\boxed{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0}$

Пример. Даны координаты точек $A(2,1,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(1,2,3)$, $D(1,0,5)$.Найти :

1) Длину ребер пирамиды $ABCD$
2) Угол между рёбрами AB и AD
3) Площадь грани ABC
4) Объем пирамиды $ABCD$.

Решение.

1) Для того чтобы найти длины рёбер пирамиды, найдем длины векторов, соответствующих этим ребрам. Для этого найдем координаты этих векторов.

$\overline{AB}=\{1-2,\ -1-1,\ 2-0\}=\{-1,-2,\ 2\}$ $\qquad\overline{AC}=\{1-2,\ 2-1,\ 3-0\}=\{-1,1,\ 3\}$

$\overline{AD}=\{1-2,\ 0-1,\ 5-0\}=\{-1,-1,\ 5\}$ $\qquad\overline{BD}=\{1-1,\ 0+1,\ 5-2\}=\{0,1,\ 3\}$

$\overline{BC}=\{1-1,\ 2+1,\ 3-2\}=\{0,3,\ 1\}$ $\qquad\overline{CD}=\{1-1,\ 0-2,\ 5-3\}=\{0,-2\}$

Теперь найдем длины этих векторов $\qquad\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

Аналогично находим длины остальных векторов

$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{11}$ $\quad\left|\overline{AD}\right|=3\sqrt{3}$ $\quad\left|\overline{BD}\right|=\sqrt{10}$ $\quad\left|\overline{CD}\right|=2\sqrt{8}$ $\quad\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{10}$

2) Найдем угол между рёбрами $\overline{AB} = \{-1, -2, 2\}$ и $\overline{AD} = \{-1, -1, 5\}$

$$\cos BAD = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}|} = \frac{(-1)\cdot(-1) + 2\cdot(-1) + 2\cdot 5}{3 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \cos BAD = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \angle BAD = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3) Найдем площадь грани ABC, т.е. найдем площадь треугольника ABC, используя геометрическое свойство векторного произведения (площадь треугольника равна половине площади прямоугольника).

$$S_\Delta = \frac{1}{2} S_\Pi = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{BC}\right|$$

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\bar{i} + 0\bar{j} - 3\bar{k} - 0\bar{k} - 6\bar{i} + 1\bar{j} = -8\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$$

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \{-8;\ 1; -3\} \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{AB} \times \overline{BC}\right| = \sqrt{64+1+9} = \sqrt{74}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{74} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

4) Найдем объем пирамиды $ABCD$.

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|$$

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 2 + 6 + 2 - 3 - 10 = -8 \Rightarrow \left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = |-8| = 8$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Ответ: $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{11}$, $\left|\overline{AD}\right| = 3\sqrt{3}$, $\left|\overline{BD}\right| = \sqrt{10}$, $\left|\overline{CD}\right| = 2\sqrt{8}$, $\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{10}$, $\left|\overline{AB}\right| = 3$

$$\angle BAD = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad S_\Delta = \frac{\sqrt{74}}{2}, \quad V_{пир} = \frac{4}{3}$$

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Прямая линия на плоскости

Геометрической фигурой на плоскости называется множество точек на плоскости. Задать фигуру – это значит указать из каких точек она состоит. Геометрическую фигуру можно задать при помощи уравнения с двумя неизвестными $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$

Если точка $\boldsymbol{M}_{\circ}(\boldsymbol{x}_{\circ},\boldsymbol{y}_{\circ})$ принадлежит фигуре, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$. Если же точка $\boldsymbol{M}_{\circ}(\boldsymbol{x}_{\circ},\boldsymbol{y}_{\circ})$ не принадлежит фигуре, то координаты этой точки не удовлетворяют уравнению $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$., т.е. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{\circ},\boldsymbol{y}_{\circ})\neq 0$

Важным понятием аналитической геометрии является – уравнение линии.

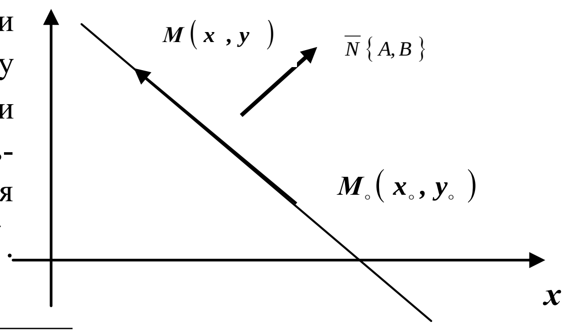
Определение . ***Уравнением*** данной ***линии*** в выбранной системе координат называется уравнение $\underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0}$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.

3.1.1. Различные виды уравнений прямой на плоскости

Прямая – это тоже геометрическая фигура, следовательно, для неё можно составить уравнение

- ***Уравнение прямой , проходящей через произвольную точку и перпендикулярной вектору***

Пусть задана прямоугольная декартова система координат, точка $\boldsymbol{M}_{\circ}(\boldsymbol{x}_{\circ},\boldsymbol{y}_{\circ})$ и вектор $\overline{N}\{A,B\}$. Через точку $\boldsymbol{M}_{\circ}(\boldsymbol{x}_{\circ},\boldsymbol{y}_{\circ})$ можно провести бесконечно много прямых, но среди них только одна бу дет перпендикулярна вектору $\overline{N}\{A,B\}$. Через две точки можно провести единственную прямую. Поэтому возьмем точку $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ так, чтобы прямая, проходящая через точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}_{\circ}$ была перпендикулярна вектору $\overline{\boldsymbol{N}}$.



Рассмотрим вектор $\overline{\boldsymbol{M}_{\circ}\boldsymbol{M}}$. Так как $\overline{\boldsymbol{M}_{\circ}\boldsymbol{M}}\perp\overline{\boldsymbol{N}}$, то скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е. $\overline{\boldsymbol{N}}\cdot\overline{\boldsymbol{M}_{\circ}\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{0}$. Координаты векторов $\overline{\boldsymbol{M}_{\circ}\boldsymbol{M}}=\{\boldsymbol{x}_{\circ}-\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}_{\circ}-\boldsymbol{y}\}$ и $\overline{\boldsymbol{N}}\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$. В координатной форме скалярное произведение этих векторов имеет вид

$$\overline{\boldsymbol{N}}\cdot\overline{\boldsymbol{M}_{\circ}\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\circ})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_{\circ})=\boldsymbol{0}$$

Определение . ***Уравнение прямой*** , проходящей через произвольную точку $\boldsymbol{M}_{\circ}(\boldsymbol{x}_{\circ},\boldsymbol{y}_{\circ})$ и перпендикулярной вектору $\overline{\boldsymbol{N}}\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ имеет вид

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\circ})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_{\circ})=0}$$

Вектор $\overline{\boldsymbol{N}}\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ называется **нормальным вектором**.

➢ ***Общее уравнение прямой***

Рассмотрим
$$A\left(x - x_{\circ}\right) + B\left(y - y_{\circ}\right) = 0$$
$$A\,x - A\,x_{\circ} + B\,y - B\,y_{\circ} = 0$$
$$A\,x + B\,y + \underbrace{\left(-A\,x_{\circ} - B\,y_{\circ}\right)}_{C} = 0$$

Получим уравнение $\underline{A\,x + B\,y + C = 0}$

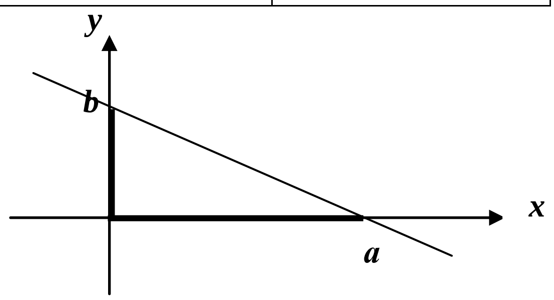
Определение . ***Общее уравнение прямой*** на плоскости в прямоугольной системе координат имеет вид $\boxed{A\,x + B\,y + C = 0}$

При различных численных значениях коэффициентов, не равных нулю одновременно, общее уравнение прямой на плоскости определяет следующие уравнения прямой на плоскости.

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

$C = 0$	$B = 0$	$A = 0$	$B = 0,\ C = 0$	$A = 0,\ C = 0$
$\boxed{A\,x + B\,y = 0}$	$\boxed{A\,x + C = 0}$	$\boxed{B\,y + C = 0}$	$\boxed{A\,x = 0}$	$\boxed{B\,y = 0}$
прямая, проходящая через начало координат	прямая, параллельная оси OY	прямая, параллельная оси OX	прямая, совпадающая с осью OY	прямая, совпадающая с осью OX

➢ ***Уравнение прямой в отрезках на осях***



Рассмотрим случай, когда $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$.

Разделим обе части уравнения $A\,x + B\,y + C = 0$ на $(-C)$,

получим $\dfrac{A\,x}{-C} + \dfrac{B\,y}{-C} - 1 = 0$

Перепишем полученное уравнение в следующем виде $\dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/A} = 1$

Пусть $\dfrac{-C}{A} = a$, $\dfrac{-C}{B} = b$, тогда будем иметь $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Определение . ***Уравнение прямой в отрезках на осях***, имеет вид $\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$

➢ ***Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.***

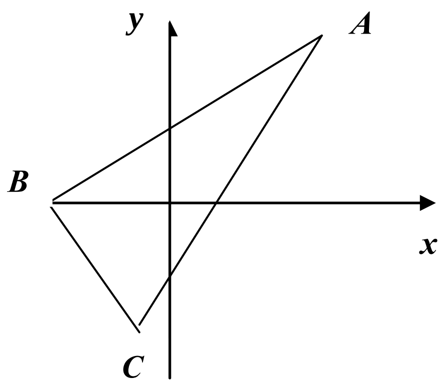
Пусть заданы две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Через две заданные точки можно провести прямую и при том только одну. Через точку $M(x, y)$ и точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ можно провести искомую прямую тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AM}$ и $\overline{AB}$ будут параллельны.

Рассмотрим векторы $\overline{AM} = \{x - x_1, y - y_1\}$ и $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$

Из условие параллельности (коллинеарности) двух векторов следует, выполнениея условия $\dfrac{x_{\overline{AM}}}{x_{\overline{AB}}} = \dfrac{y_{\overline{AM}}}{y_{\overline{AB}}}$. Подставляя координаты векторов будем иметь $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

Определение. ***Уравнение прямой проходящей через две заданные точки*** имеет вид $\boxed{\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$

Пример. Даны вершины треугольника $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$. Составить уравнение его стороны AC.



1. Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(4, 6)$ и $C(-1, -4)$:

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow$$

$$\frac{x - 4}{-1 - 4} = \frac{y - 6}{-4 - 6}$$

$$\frac{x - 4}{-5} = \frac{y - 6}{-10} \Rightarrow 2x - 8 = y - 6$$

$$2x - y - 2 = 0$$

$$(y = 2x - 2)$$

Итак уравнение прямой AC имеет вид $\underline{2x - y - 2 = 0}$

➢ ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом***

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Выразим из этого уравнения y :

$y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}y$. Пусть $k = -\dfrac{A}{B}$, а $b = -\dfrac{C}{B}$.

Тогда $y = kx + b$, где k - угловой коэффициент, который равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox, а b - отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy

Определение. ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом*** имеет вид $\boxed{y = kx + b}$

Пример. Определить угловой коэффициент и отрезок, который отсекает прямая на оси Oy.

Решение.

a) $3x + 4y - 6 = 0$

$4y = 6 - 3x$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

$k = -3/4 \quad b = 3/2$

b) $2y + 3x = 0$

$y = -\frac{3}{2}x$

$k = -\frac{3}{2} \quad b = 0$

c) $y + 3 = 0$

$y = -3$

$k = 0 \quad b = -3$

➢ ***Без вывода дадим определения других уравнений прямой***

Определение . ***Каноническое уравнение прямой,*** проходящей через заданную точку $M_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ})$ в направлении, заданном вектором $\bar{l}\{m, n\}$ имеет вид $\boxed{\frac{x - x_{\circ}}{m} = \frac{y - y_{\circ}}{n}}$

Определение . ***Параметрическое уравнение прямой*** имеет вид, где t-параметр, т.е. при одном и том же значении t эти уравнения определяют координаты x и y некоторой точки прямой

$$\boxed{\begin{cases} x = x_{\circ} + mt \\ y = y_{\circ} + nt \end{cases}}$$

Определение . ***Нормальное уравнение прямой*** имеет вид, $\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0}$

где α - угол между нормальным вектором $\overline{N}$ к данной прямой и осью OX; p - длина отрезка прямой, совпадающего по направлению с $\overline{N}$ и соединяющего начало координат с заданной прямой.

➢ ***Уравнение пучка прямых.***

Определение. ***Пучком прямых на плоскости*** называется совокупность прямых, проходящих через фиксированную точку – центр пучка

Определение. ***Уравнение пучка прямых,*** проходящих через заданную точку $M_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ})$ имеет вид $\boxed{y - y_{\circ} = k \cdot (x - x_{\circ})}$

3.1.2. Расстояние от точки до прямой

Определение. ***Расстояние от*** заданной ***точки*** $M_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ})$ ***до прямой*** $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле $\boxed{d = \frac{|Ax_{\circ} + By_{\circ} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$

3.1.3. Угловые соотношения между прямыми

Определение. Если две прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол между этими прямыми вычисляется по формуле $\boxed{tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}}$

Определение. Если две прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол между этими прямыми вычисляется по формуле $\boxed{tg\,\varphi = \dfrac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_2B_1}}$ или $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{\overline{N_1}\,\overline{N_2}}{|\overline{N_1}|\,|\overline{N_2}|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$

3.1.4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть заданы две прямые L_1 и L_2

$$L_1 : \ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \ \text{ или } \ y = k_1x + b_1$$
$$L_2 : \ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \ \text{ или } \ y = k_2x + b_2$$

Взаимное расположение двух прямых определяется взаимным расположением соответствующих им нормальных векторов $\overline{N}_1\{A_1, B_1\}$ и $\overline{N}_2\{A_2, B_2\}$

две прямые L_1 и L_2

перпендикулярны

$$\overline{N_1} \perp \overline{N_2}$$
$$\Downarrow$$
$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$
или
$$k_1k_2 = -1$$

параллельны

$$\overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$
или
$$k_1 = k_2$$

Совпадают

$$\Downarrow$$
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$
или
$$k_1 = k_2$$
$$b_1 = b_2$$

Пример. Пусть задана прямая $L_1 : \ 3x - 2y + 4 = 0$ и точка $A(-1, 2)$. Составить

a) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой L_1
b) уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой L_1

Решение.

1) Составим уравнение прямых с угловым коэффициентом, проходящих через точку $A(-1, 2)$ по формуле
$$y - y_A = k_2 \cdot (x - x_A)$$
$$y - 2 = k_2 \cdot (x + 1)$$
$$y = k_2 \cdot (x + 1) + 2$$
2) Запишем заданную прямую $L_1 : \ 3x - 2y + 4 = 0$, как прямую с угловым коэффициентом $y = \dfrac{3}{2}x + 2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dfrac{3}{2}$
3) Для того чтобы прямые L_1 и L_2 были параллельны, необходимо, чтобы выполнялось условие $k_1 = k_2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow$
$$y = \frac{3}{2}\cdot(x + 1) + 2$$
$$2y = 3x + 3 + 4$$
$$\underline{2y - 3x - 7 = 0}$$

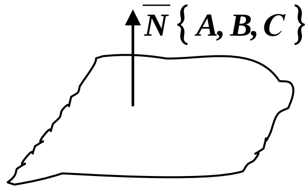
4) Для того чтобы прямые L_1 и L_2 были перпендикулярны, необходимо, чтобы выполнялось условие $k_1 k_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{2}{3} \cdot \left(x + 1 \right) + 2$

$$3y = -2x - 2 + 6$$

$$\underline{3y + 2x - 4 = 0}$$

3.2. Плоскость в пространстве

Всякое уравнение с тремя переменными x, y, z определяет поверхность, как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению $\boxed{F\left(x, y, z \right) = 0}$



Если в пространстве задана декартова прямоугольная система координат $XOYZ$, то любое уравнение первой степени с тремя неизвестными x, y, z, необходимо и достаточно определяет относительно этой системы плоскость P.

3.2.1. Различные виды уравнений плоскости

➢ ***<u>Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку.</u>***

<u>Утверждение.</u> Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $XOYZ$ задана произвольная точка $M_\circ\left(x_\circ, y_\circ, z_\circ \right)$ и нормальный вектор $\overline{N}\left\{ A, B, C \right\}$. Некоторая точка $M\left(x, y, z \right)$ будет описывать плоскость, перпендикулярную вектору $\overline{N}$ и проходящую через точку $M_\circ$ тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_\circ M}$ будет перпендикулярен вектору $\overline{N}$, т.е. $\cdot\ \overline{N} \cdot \overline{M_\circ M} = 0$

<u>Определение</u> . ***<u>Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку</u>*** имеет вид

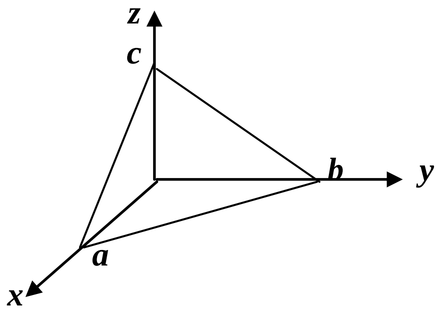
$$\boxed{A\left(x - x_\circ \right) + B\left(y - y_\circ \right) + C\left(z - z_\circ \right) = 0}$$

➢ ***<u>Общее уравнение плоскости</u>***

<u>Определение</u>. **<u>Общее уравнение плоскости</u>** имеет вид $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

➢ ***<u>Уравнение плоскости в отрезках на осях.</u>***

<u>Определение</u> . ***<u>Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку</u>*** имеет вид $\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1}$ где $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$



➢ ***Уравнение плоскости в векторной форме.***

Уравнение плоскости в векторной форме имеет вид $\boxed{\bar{r} \cdot \overline{n_\circ} = p}$,
где $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ - радиус– вектор текущей точки $M(x\ , y\ , z)$;
$\overline{n_\circ} = \bar{i} \cdot \cos\alpha + \bar{j} \cdot \cos\beta + \bar{k} \cdot \cos\gamma$ - единичный вектор, имеющий направление перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат;
α, β, γ - углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат $Ox. Oy. Oz$;
p - длина этого перпендикуляра.

➢ ***Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки***

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой $M_1(x_1\ , y_1\ , z_1)$, $M_2(x_2\ , y_2\ , z_2)$, $M_3(x_3\ , y_3\ , z_3)$ и текущей точки $M(x\ , y\ , z)$, можно найти из условия компланарности векторов $\overline{M_1M}$,$\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, ,
т.е. $\overline{M_1M}\ \overline{M_1M_2}\ \overline{M_1M_3} = 0$

Определение . ***Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки***, не лежащие на одной прямой, записывается в виде определителя

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

где $(x_1\ , y_1\ , z_1)$, $(x_2\ , y_2\ , z_2)$, $(x_3\ , y_3\ , z_3)$ координаты заданных точек

3.2.2. Взаимное расположение двух плоскостей. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть заданы две плоскости P_1 и P_2

$$P_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$P_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда взаимное расположение двух плоскостей определяется взаимным расположением соответствующих им нормальных векторов $\overline{N}_1\{A_1, B_1.C_1\}$ и $\overline{N}_2\{A_2, B_2.C_2\}$

две плоскости P_1 и P_2

перпендикулярны	***Параллельны***	***Совпадают***
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\overline{N_1} \perp \overline{N_2}$	$\overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$	
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$
$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	

3.2.3. Угол между двумя плоскостями

<u>Определение</u>. Если две плоскости P_1 и P_2 заданы общими уравнениями $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то угол между этими плоскостями вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1}\,\overline{N_2}}{|\overline{N_1}|\,|\overline{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

3.2.4. Расстояние от точки до плоскости

<u>Определение</u>. ***<u>Расстояние от точки</u>*** $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ ***<u>до плоскости</u>***, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле $d = \dfrac{|Ax_\circ + By_\circ + Cz_\circ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

3.2.5. Уравнения прямой в пространстве

<u>Определение</u>. Прямую линию в пространстве можно задавать в виде ***<u>линии пересечения двух</u>*** не совпадающих и не параллельных ***<u>плоскостей</u>*** P_1 и P_2, т.е. в виде системы уравнений, определяющих плоскости
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

<u>Определение.</u> ***<u>Каноническое уравнение прямой в пространстве</u>***, проходящей через заданную точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ в направлении, заданном вектором $\bar{l}\,\{m, n, p\}$ имеет вид

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} = \frac{z - z_\circ}{p}$$

<u>Определение.</u> ***<u>Уравнение прямой в пространстве</u>***, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

<u>Определение</u>. ***<u>Параметрическое уравнение прямой в пространстве</u>*** имеет вид,

$$\begin{cases} x = x_\circ + mt \\ y = y_\circ + nt \\ z = z_\circ + pt \end{cases},$$ где t -параметр

3.2.6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость $P\ :\ \ Ax + By + Cz + D = 0$ с нормальным вектором $\overline{N}\left\{A, B, C\right\}$ и прямая $L:\ \dfrac{x - x_\circ}{m} = \dfrac{y - y_\circ}{n} = \dfrac{z - z_\circ}{p}$ с нормальным вектором $\bar{l}\left\{m, n, p\right\}$

Определение. ***Углом*** α между прямой и плоскостью в пространстве называется угол между прямой и её проекцией на плоскость, где $0 \le \alpha \le 90^\circ$

Определение Если плоскость и прямая заданы уравнениями $P\ :\ \ Ax + By + Cz + D = 0$ и $L:\ \dfrac{x - x_\circ}{m} = \dfrac{y - y_\circ}{n} = \dfrac{z - z_\circ}{p}$,то угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле $\boxed{\sin\alpha = \left|\cos\left(90^\circ \pm \alpha\right)\right| = \dfrac{\left|\overline{N}\cdot\bar{l}\right|}{\left|\overline{N}\right|\cdot\left|\bar{l}\right|}}$ или $\boxed{\sin\alpha = \dfrac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$

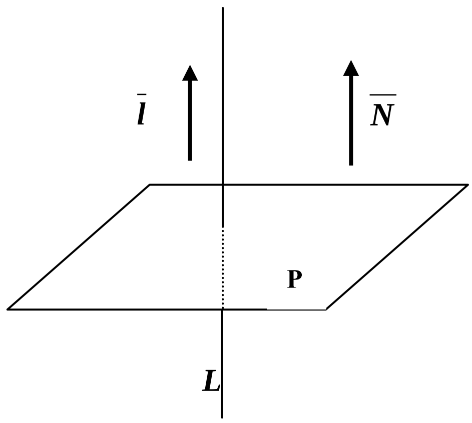
Прямая L и плоскость P

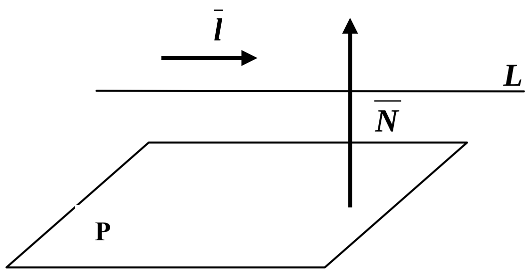
перпендикулярны

$$\Downarrow$$
$$\bar{l}\ \parallel\ \overline{N}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

параллельны

$$\Downarrow$$
$$\bar{l}\ \perp\ \overline{N}$$
$$\Downarrow$$
$$Am + Bn + Cp = 0$$





3.3. Кривые второго порядка

Определение: ***Алгебраической кривой второго порядка*** называется кривая, определяемая в декартовой системе координат алгебраическим уравнением второй степени $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где не все коэффициенты A, B, C равны нулю одновременно

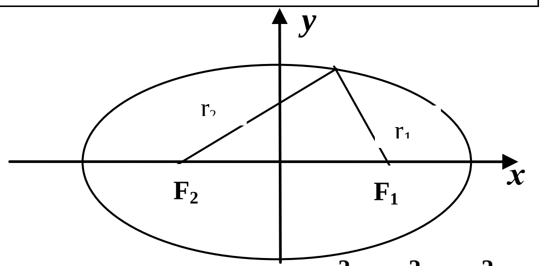
При определенных соотношениях между коэффициентами A, B, C уравнения $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ можно определить к какому типу относится кривая. Существует три типа кривых: ***эллиптический тип***, ***гиперболический тип, параболический тип***. Рассмотрим эти соотношения коэффициентов.

1. $AC - B^2 > 0$ — кривые эллиптического типа. К ним относятся эллипс, окружность, мнимый эллипс, мнимая окружность, точка.
2. $AC - B^2 < 0$ — кривые гиперболического типа. К ним относятся гипербола, пара пересекающихся прямых.
3. $AC - B^2 = 0$ — кривые параболического типа. К ним относятся парабола, пара параллельных прямых, пара совпадающих прямых.

Рассмотрим каждый тип отдельно.

3.3.1. Эллипс

Определение. ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная**,** равная $2a$



Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

где a - большая полуось, b - малая полуось, связанные соотношением $a^2 - b^2 = c^2$. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ - фокусы эллипса. Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $0 \le \varepsilon < 1$

Определение. ***Фокальный радиус*** – это расстояние от некоторой точки кривой до его фокусов

Фокальные радиусы эллипса r_1 и r_2 связаны соотношением $r_1 + r_2 = 2a$

Директрисы эллипса имеют вид $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

Частные случаи эллипса:

1. При $a = b$ получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом a. Каноническое уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ с центром в точке $O'(a, b)$ и радиусом r

2. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ задаёт точку $O(0,0)$

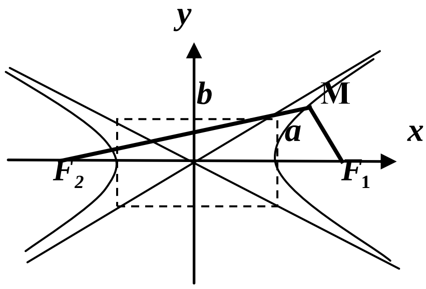
3. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ задаёт мнимый эллипс

4. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=-1$ задаёт мнимую окружность

3.3.2. Гипербола

Определение. ***Гиперболой*** называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная**,** равная $2a$

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a - большая полуось, b - малая полуось, связанные соотношением $a^2+b^2=c^2$. Точки $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ - фокусы гиперболы. F_1M и F_2M - фокальные радиусы гиперболы, r_1 и r_2 связаны соотношением $|r_2-r_1|=2a$



Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \varepsilon>1$

Директрисы гиперболы имеют вид $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$

Асимптоты гиперболы имеют вид $y=\pm\frac{b}{a}x$

Частные случаи гиперболы:

1. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ задаёт сопряженную гиперболу с данной.

2. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ задаёт пару пересекающихся прямых,

т.к. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0 \Rightarrow \frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$.

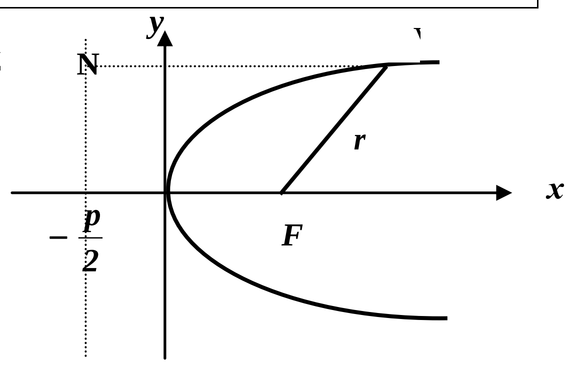
3.3.3. Парабола

Определение. ***Параболой*** называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки (не принадлежащей этой прямой), называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $y^2=2px$, где $p>0$ - параметр параболы.

Уравнение директрисы параболы имеет вид $x=-\frac{p}{2}$.

Фокусом параболы является точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$



Частные случаи параболы

1. Уравнение $x^2 = 2py$ задаёт параболу, симметричную относительно оси OY
2. Уравнение $x^2 = 0$ задаёт дважды совмещенную ось OX
3. Уравнение $y^2 = 0$ задаёт дважды совмещенную ось OY

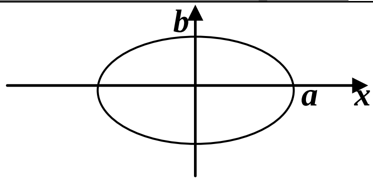
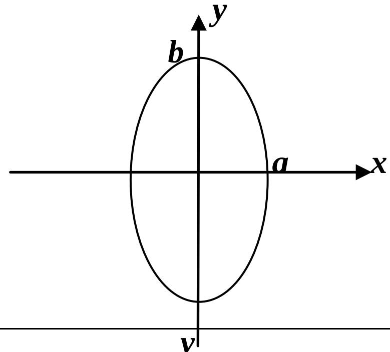
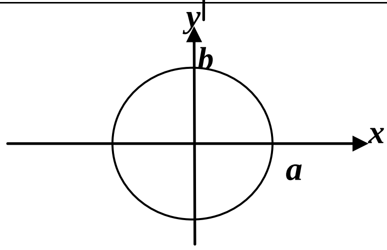
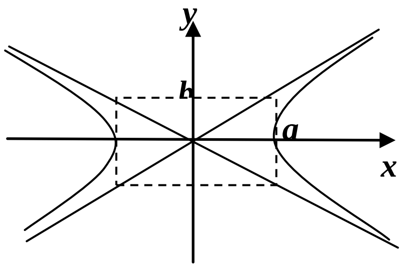
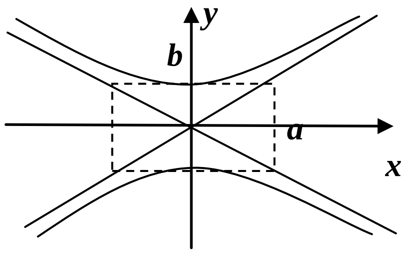
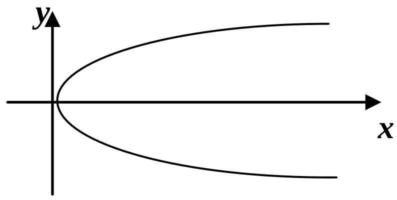
Замечание. При решении конкретных задач трудно ожидать получения уравнения сразу в каноническом виде. Поэтому, чтобы решить поставленную задачу (выяснить, например, что это за линия и построить её) необходимо сделать некоторые преобразования (такие как преобразования параллельного переноса и поворота осей координат). Например, если в полученном уравнении отсутствует член с произведением текущих координат xy, то это можно сделать с помощью параллельного переноса осей координат. Если же в полученном уравнении присутствует член с произведением текущих координат xy, то избавиться от него можно при помощи поворота осей координат.

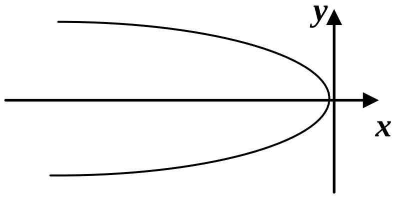
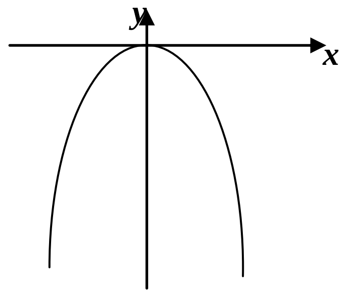
Для удобства все выше сказанное можно свести в таблицы 1 и 2.

Таблица 1

	эллипс	***гипербола***	***парабола***	
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$	$x^2 = 2py$
Большая полуось	$a^2 = b^2 - c^2$	$a^2 = c^2 - b^2$	-------	-------
Малая полуось	$b^2 = a^2 - c^2$	$b^2 = c^2 - a^2$	-------	-------
Фокусы	$F_1(c, 0)$ $F_2(-c, 0)$	$F_1(c, 0)$ $F_2(-c, 0)$	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a}$ $0 \le \varepsilon < 1$	$\varepsilon = \frac{c}{a}$ $\varepsilon > 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$
Директрисы	$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$	$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$	$x = -\frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$
Асимптоты	-------	$y = \pm\frac{b}{a}x$	-------	-------
Фокальные радиусы	$z_1 = a + \varepsilon x$	правая ветвь $z_1 = \varepsilon x + a$ $z_2 = \varepsilon x - a$	$z = x + \frac{p}{2}$	$z = y + \frac{p}{2}$
	$z_2 = a - \varepsilon x$	Левая ветвь $z_1 = -\varepsilon x - a$ $z_2 = -\varepsilon x + a$	-------	-------
Уравнение касательной в точке $M(x_1; y_1)$	$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$	$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$	$yy_1 = p \cdot (x + x_1)$	$xx_1 = p \cdot (y + y_1)$

Таблица 2

Название	***Каноническое уравнение***	***Схематический чертеж***
эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\ b>0$ $a>b$	
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\ b>0$ $a<b$	
окружность	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0, b>0$ $a=b$	
гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\ b>0$	
	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\quad a>0,\ b>0$	
парабола	$y^2=2px,\quad p>0$	

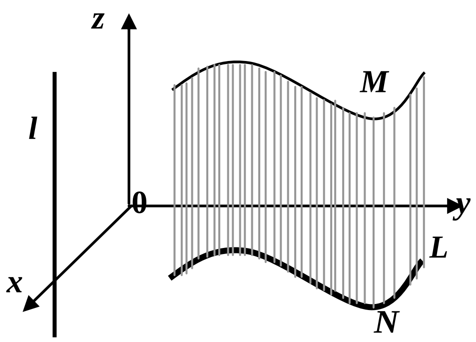
парабола	$y^2 = 2px, \quad p < 0$	
	$x^2 = 2py, \quad p < 0$	

3.4. Поверхности второго порядка

3.4.1. Цилиндрические поверхности с образующими, параллельными координатным осям

Пусть в пространстве дана линия L и прямая l. Если через каждую точку линии L провести прямую, параллельную l, то получим некоторую поверхность – **цилиндрическую** поверхность. Линия L будет **направляющей** цилиндрической поверхности, а прямые, параллельные прямой l - **образующими** цилиндрической поверхности.

Определение. ***Цилиндрической поверхностью*** называется поверхность, образованная движением прямой, пересекающей заданную линию (***направляющую***) и параллельной заданному направлению.



Выберем систему координат так, чтобы ось Oz была параллельна образующим некоторой цилиндрической поверхности, а направляющая линия L, уравнение которой $F(x, y) = 0$ лежала в координатной плоскости xOy.

Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит данной поверхности. Точка $N(x, y, 0) \in L$ является проекцией точки $M(x, y, z)$ на плоскость xOy. Тогда координаты точки M удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$

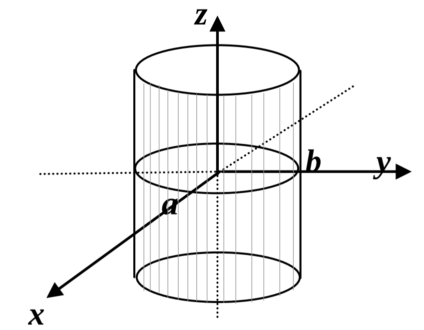
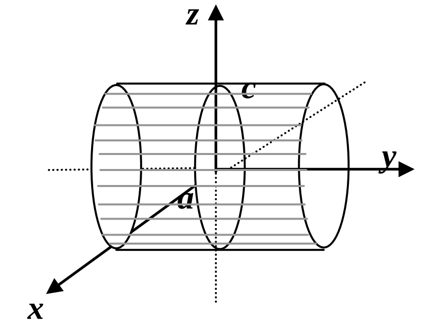
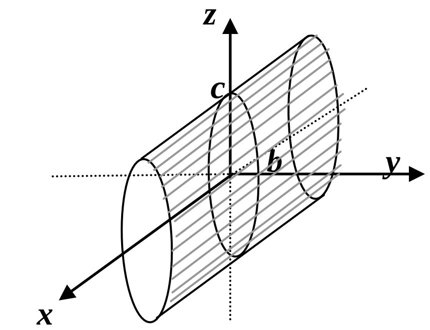
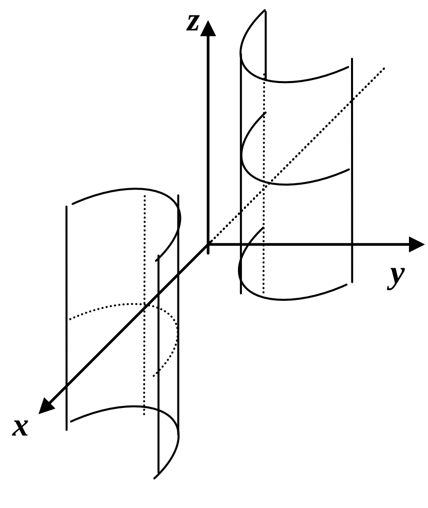
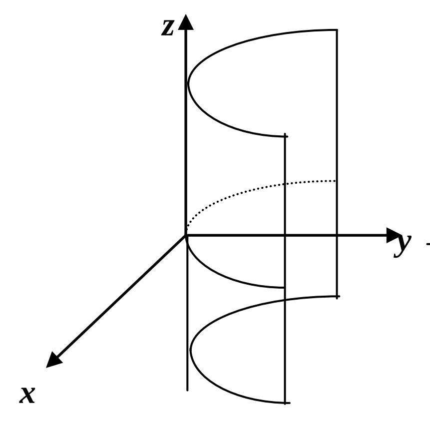
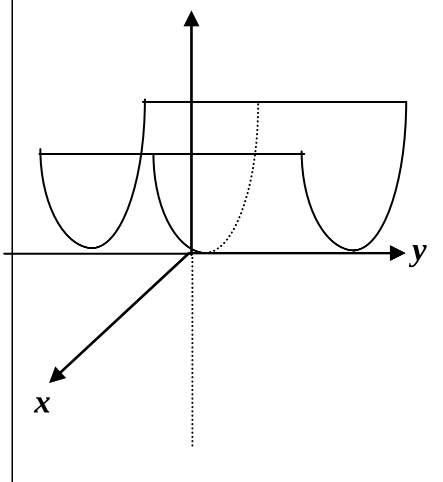
Определение. Уравнение $F(x, y) = 0$ задаёт цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси Oz и направляющей кривой $F(x, y) = 0$ в плоскости xOy

Определение. Уравнение $F(x, z) = 0$ задаёт цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси Oy и направляющей кривой $F(x, z) = 0$ в плоскости xOz

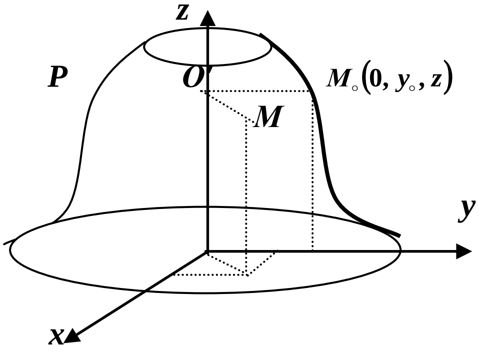
Определение. Уравнение $F(y, z) = 0$ задаёт цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси Ox и направляющей кривой $F(y, z) = 0$ в плоскости zOy

В таблице 3 приведены основные виды цилиндров второго порядка.

Таблица 3

Цилиндры второго порядка		
Эллиптический цилиндр		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
		
Гиперболический цилиндр	***Параболический цилиндр***	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$x^2=2py$	$z^2=2px$
		

3.4.2. Поверхности вращения



Пусть в плоскости zOy задана линия L, уравнение которой $F(y,z)=0$. Точка $M_\circ(0, y_\circ, z)$ принадлежит кривой L. Найдем уравнение поверхности P, полученной в результате вращения линии L вокруг оси Oz.

Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности P, $M_\circ(0, y_\circ, z)\in L$ следовательно, $F(y_\circ, z)=0$.

Но $y_{\circ} = O'M_{\circ} = O'M = \sqrt{x^2 + y^2}$. Получаем уравнение поверхности вращения

$$\boxed{F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0}$$

Определение. Уравнение $F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$ задаёт поверхность вращения линии $F(y, z) = 0$, $x = 0$, лежащей в плоскости zOy, вокруг оси Oz

Определение. Уравнение $F\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$ задаёт поверхность вращения линии $F(x, y) = 0$, $z = 0$, лежащей в плоскости xOy, вокруг оси Ox

Определение. Уравнение $F\left(\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0$ задаёт поверхность вращения линии $F(x, y) = 0$, $z = 0$, лежащей в плоскости xOy, вокруг оси Oy

Таким образом, для того, чтобы ***получить уравнение поверхности вращения*** необходимо:

1. переменную, одноименную с осью вращения оставить без изменения,
2. другую переменную заменить по формуле расстояния до оси вращения.

3.4.3. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

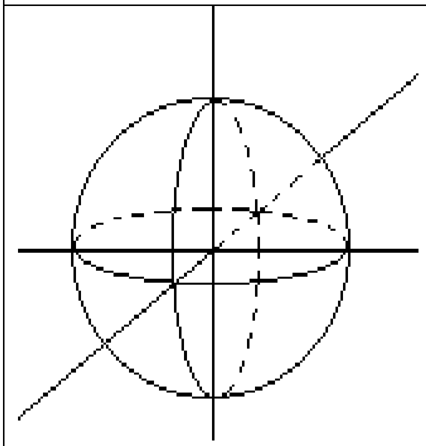
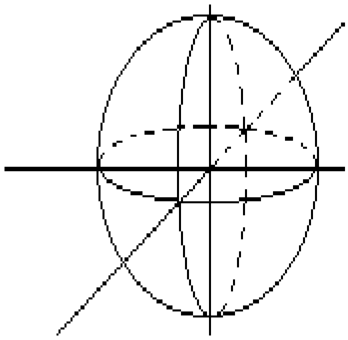
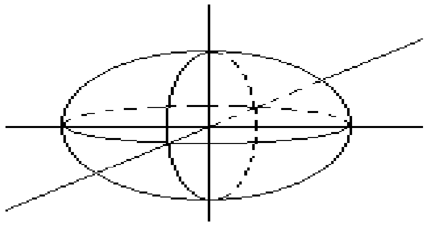
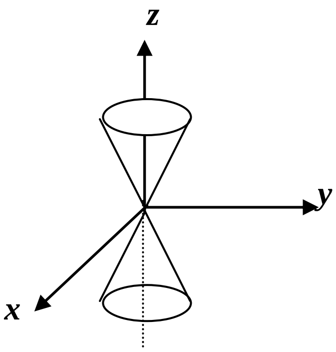
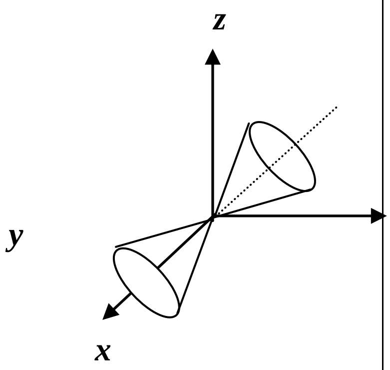
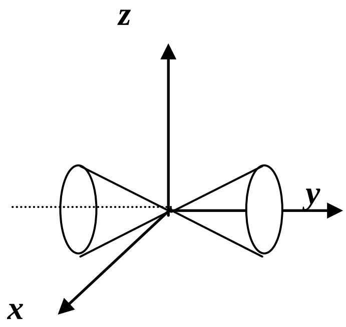
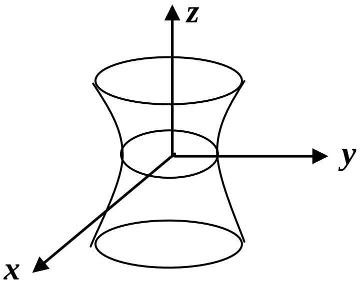
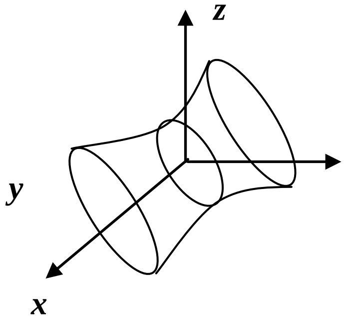
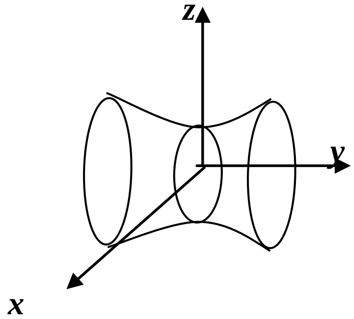
Определение. ***Поверхностью второго порядка*** называется любая поверхность, заданная в прямоугольной системе координат уравнением $F(x, y, z) = 0$,
где $F(x, y, z) = 0$ - многочлен второй степени относительно переменных x, y, z, т.е. $F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Qyz + Gx + Ky + Hz + L$

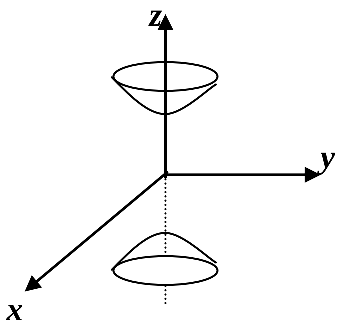
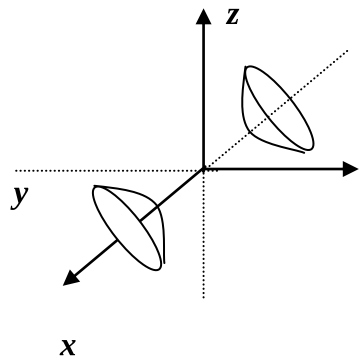
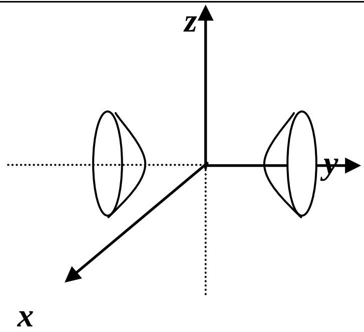
Уравнение поверхности второго порядка можно привести к одному из следующих видов:

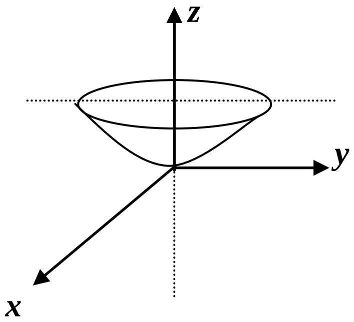
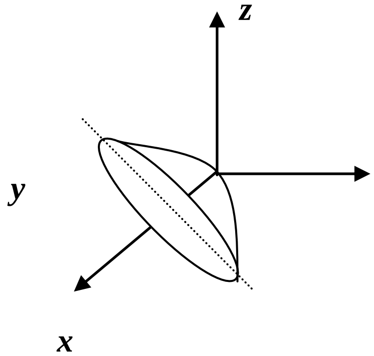
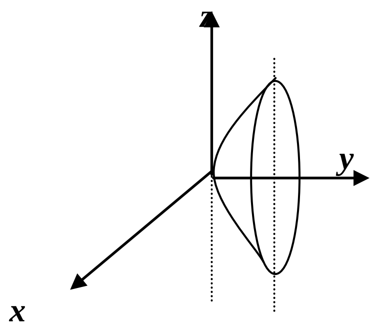
- ✓ $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$, где $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, L \neq 0$ — эти уравнения описывают эллипсоиды и гиперболоиды;
- ✓ $Ax^2 + By^2 + Hz = 0$, где $A \neq 0, B \neq 0, H \neq 0$ — эти уравнения описывают параболоиды

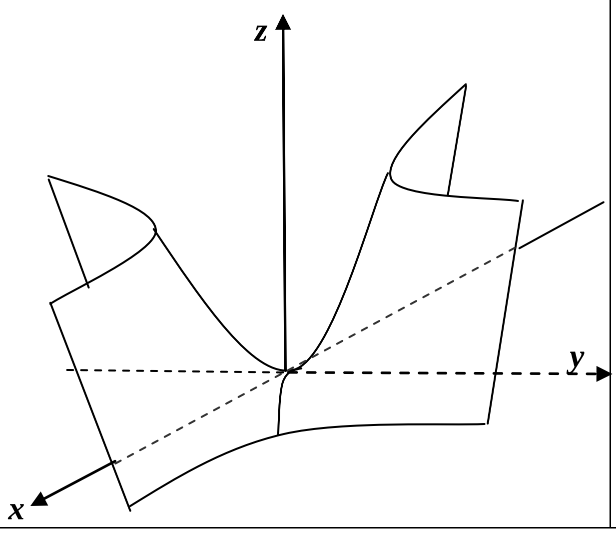
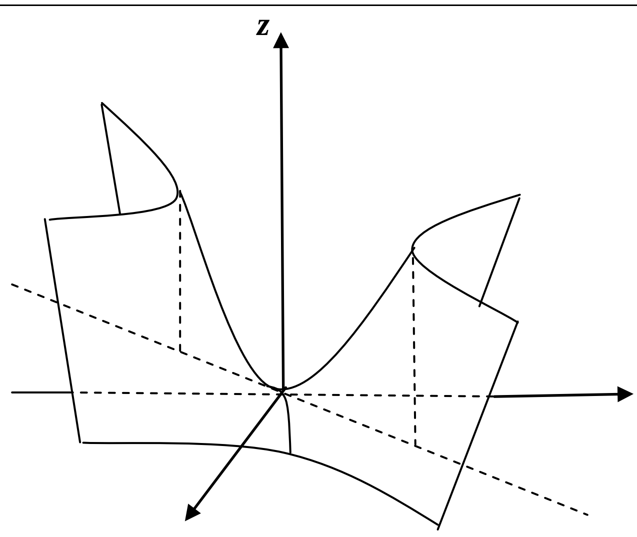
Основные поверхности второго порядка, заданные их каноническими уравнениями приведены в таблице 4.

Таблица 4

Эллипсоиды		
сфера	***эллипсоид вращения***	***трехосный эллипсоид***
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
		
Конус второго порядка		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
		
Однополостный гиперболоид		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
		

Двуполостный гиперболоид		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$
		

Эллиптический параболоид		
$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $p>0,\quad q>0$	$\frac{y^2}{q}+\frac{z^2}{r}=2x$ $p>0,\quad q>0$	$\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{r}=2y\quad p>0,\quad q>0$
		

Гиперболический параболоид	
$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $p>0,\quad q>0$	$z=axy\quad a>0$
	

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Задачник. М., Наука, 1982.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука. 1984. М., Мир, 1984.
3. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., Наука, 1980.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1999.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М., Наука, 1983.
6. Шевченко Ю.А., Федин С.Н., Скопинцев О.Д. Высшая математика (часть 1) конспект лекций. М., МТУСИ, центр ДО, 2001.

Содержание

Киреева Юлия Геннадьевна
Петров Владислав Викторович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Подписано в печать__________________Формат 60×90 1/16. Бумага газетная.
Печать трафаретная. Уч.-изд. л. 2,6. Усл. печ. л. 2,9.
Тираж 1000 экз. Заказ №_____

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»,
603950, Н.Новгород, Ильинская, 65

Полиграфцентр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65