>

ЗАДАЧА # 1. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3 + \frac{3}{10}\left(z - \frac{3}{10} + \frac{4}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?",\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x, y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x, y),\ "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x, y) = 0$$

____

ЗАДАЧА # 2. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{2}{5}\left(z + \frac{2}{5} - \frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{2}{5},\ y = -\frac{1}{2}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?",\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x, y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x, y),\ "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x, y) = 0$$

____

ЗАДАЧА # 3. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{4}{5}\left(z - \frac{4}{5} - \frac{9}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 + \frac{1}{10}\left(z - \frac{1}{10} - \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{4}{5},\ y = \frac{1}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 4. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{1}{5}\left(z + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y, \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{1}{5}, y = 0$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 5. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{3}{5}\left(z - \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{9}{10}\left(z + \frac{9}{10} - \frac{3}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y, \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{3}{5}, y = -\frac{9}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 6. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{3}{10}\left(z + \frac{3}{10} - \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{7}{10}\left(z + \frac{7}{10} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{3}{10},\ y=-\frac{7}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?",\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y),\ "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y)=0$$

_ _

ЗАДАЧА # 7. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=\frac{1}{5}\left(z-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)^3+\frac{9}{10}\left(z-\frac{9}{10}+\frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=\frac{1}{5},\ y=\frac{9}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?",\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y),\ "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y)=0$$

_ _

ЗАДАЧА # 8. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=-\frac{7}{10}\left(z+\frac{7}{10}+\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^3-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{7}{10},\ y=-\frac{1}{2}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?",\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y),\ "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 9. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=-\frac{1}{5}\left(z+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\,\mathrm{I}\right)^3+\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{1}{5},\ y=\frac{1}{2}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$\text{"?"},\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y),\ \text{"?"}$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 10. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=-\frac{3}{5}\left(z+\frac{3}{5}-\frac{3}{10}\,\mathrm{I}\right)^3+\frac{1}{5}\left(z-\frac{1}{5}-\frac{9}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{3}{5},\ y=\frac{1}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$\text{"?"},\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y),\ \text{"?"}$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 11. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=-\frac{1}{10}\left(z+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3+\frac{1}{5}\left(z-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{1}{10}, y=\frac{1}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 12. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{4}{5}\left(z-\frac{4}{5}-\frac{3}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 + \frac{1}{10}\left(z-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y, \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=\frac{4}{5}, y=\frac{1}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 13. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{7}{10}\left(z-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{4}{5}\left(z+\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y, \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=\frac{7}{10}, y=-\frac{4}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 14. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{3}{5}\left(z+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\,I\right)^3 - \frac{2}{5}\left(z+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\,I\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + I\,y,\ \phi(z) = u(x,y) + I\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{3}{5},\ y = -\frac{2}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?",\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y),\ "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y) = 0$$

____

ЗАДАЧА # 15. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{4}{5}\left(z+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\,I\right)^3 + \frac{3}{5}\left(z-\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\,I\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + I\,y,\ \phi(z) = u(x,y) + I\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{4}{5},\ y = \frac{3}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?",\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y),\ "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y) = 0$$

____

ЗАДАЧА # 16. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{7}{10}\left(z+\frac{7}{10}-\frac{2}{5}\,I\right)^3 - \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\,I\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + I\,y,\ \phi(z) = u(x,y) + I\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{7}{10},\ y = -\frac{1}{2}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 17. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\,I\right)^3 + \frac{3}{5}\left(z - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\,I\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + I\,y, \phi(z) = u(x,y) + I\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 18. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{1}{10}\left(z - \frac{1}{10} + \frac{2}{5}\,I\right)^3 + \frac{1}{10}\left(z - \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\,I\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + I\,y, \phi(z) = u(x,y) + I\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{1}{10}, y = \frac{1}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 19. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{1}{10}\left(z + \frac{1}{10} - \frac{4}{5}\,I\right)^3 - \frac{7}{10}\left(z + \frac{7}{10} - \frac{7}{10}\,I\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{1}{10}, y = -\frac{7}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0$$

_ _

ЗАДАЧА # 20. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{4}{5}\left(z + \frac{4}{5} - \frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{3}{5}\left(z + \frac{3}{5} + \frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0$$

_ _

ЗАДАЧА # 21. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{4}{5}\left(z + \frac{4}{5} - \frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(z - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{4}{5}, y = \frac{1}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)=0$$

Пример: РГР # 13

> $N := NumTask - 8$

$$N := 13 \quad \textbf{(1)}$$

> $\phi := g_N$

$$\phi := \frac{7}{10}\left(z-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3-\frac{4}{5}\left(z+\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 \quad \textbf{(2)}$$

> $re_1 := re_N;\ im_1 := im_N;\ X_1 := X_N;\ Y_1 := Y_N$

$$re_1 := u(x,y) = -\frac{63}{125}x+\frac{339}{500}y-\frac{3079}{5000}-\frac{1}{10}x^3+\frac{339}{100}y^2+\frac{3}{10}xy^2+\frac{3}{50}xy-\frac{339}{100}x^2$$

$$im_1 := v(x,y) = -\frac{253}{5000}+\frac{1}{10}y^3-\frac{3}{10}x^2y-\frac{339}{500}x+\frac{3}{100}y^2-\frac{339}{50}xy-\frac{63}{125}y-\frac{3}{100}x^2$$

$$X_1 := \frac{7}{10}$$

$$Y_1 := -\frac{4}{5} \quad \textbf{(3)}$$

> $gthree_1 := pointplot3d(\{[X_1, Y_1, eval(rhs(re_1), [x=X_1, y=Y_1])]\}, axes=normal, symbol=solidcircle, symbolsize=25, color=red):$

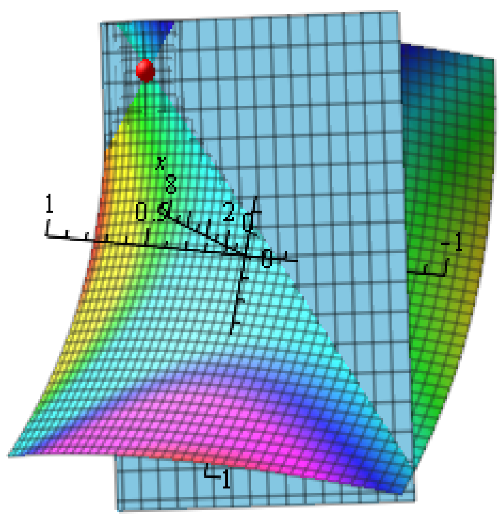
> $gthree_2 := plot3d(rhs(re_1), x=-1..1, y=-1..1, grid=[200, 200], color=rhs(re_1)):$

> $gthree_3 := plot3d\left(eval(rhs(re_1), [x=X_1, y=Y_1]) + eval\left(\frac{\partial}{\partial x}rhs(re_1), [x=X_1, y=Y_1]\right)\cdot(x-X_1) + eval\left(\frac{\partial}{\partial y}rhs(re_1), [x=X_1, y=Y_1]\right)\cdot(y-Y_1), x=-1..1, y=-1..1, grid=[50, 50], color=\text{"SkyBlue"}\right):$

> $[x=X_1, y=Y_1]$

$$\left[x=\frac{7}{10}, y=-\frac{4}{5}\right] \quad \textbf{(4)}$$

> $display(gthree_1, gthree_2, gthree_3, caption='$*Касательная плоскость* в *заданной точке* $[x=X_1, y=Y_1]')$



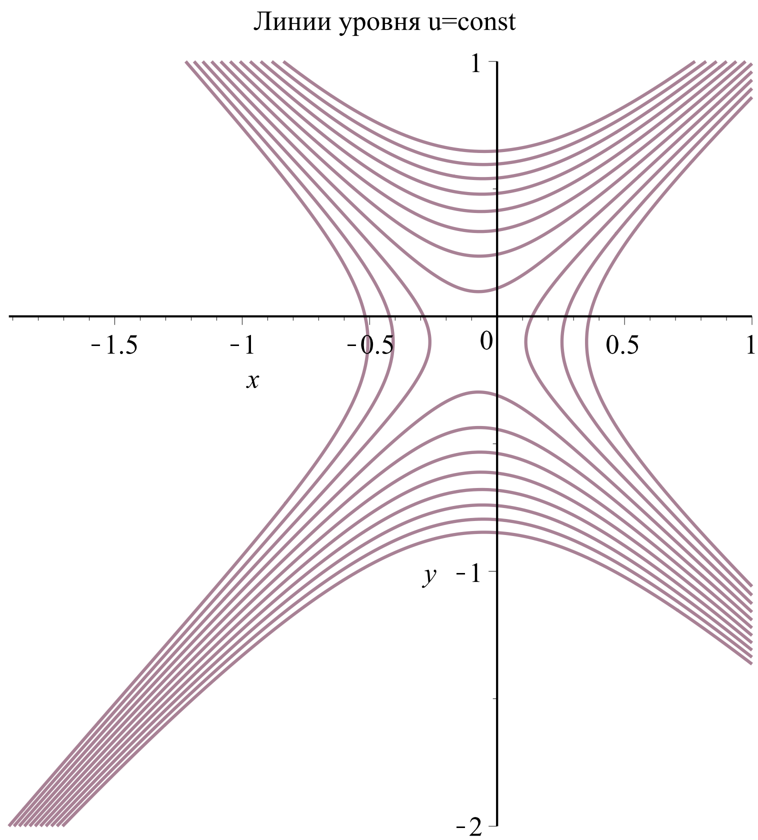
Касательная плоскость в заданной точке $\left[x=X_1,\, y=Y_1\right]$

> $ref_1 := \left[seq\left(rhs\left(re_1\right)=0.250\cdot i,\, i=-5..5\right)\right]:$

> $grph_1 := implicitplot\left(ref_1,\, x=-2..1,\, y=-2..1,\, gridrefine=4,\, scaling=constrained,\, color=ColorTools{:}\text{-}Color\left(\left[\frac{rand(\ )}{10^{12}},\, \frac{rand(\ )}{10^{12}},\, \frac{rand(\ )}{10^{12}}\right]\right),\, coloring=[\text{"White"},\, \text{"DarkViolet"}]\right);$

[Length of output exceeds limit of 1000000] **(5)**

> $display\left(grph_1,\, \text{title}=\text{"Линии уровня u=const"}\right)$

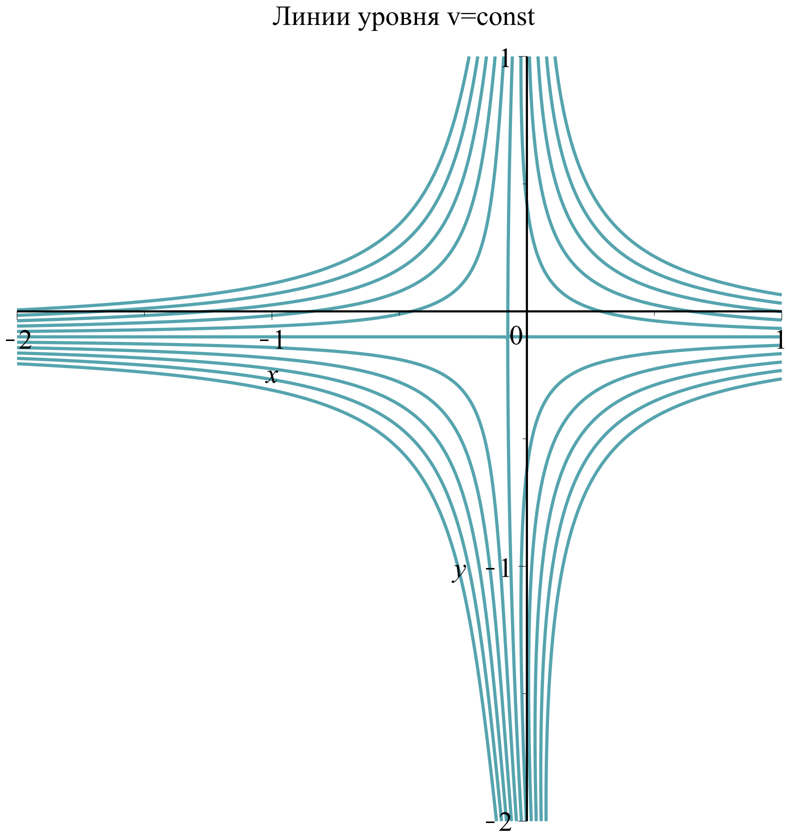


> $imf_1 := \left[seq\left(rhs\left(im_1\right) = 0.250 \cdot i, i = -5 ..5\right)\right]:$

> $grph_2 := implicitplot\left(imf_1, x = -2 ..1, y = -2 ..1, gridrefine = 4, scaling = constrained, color = ColorTools\text{:-}Color\left(\left[\frac{rand(\,)}{10^{12}}, \frac{rand(\,)}{10^{12}}, \frac{rand(\,)}{10^{12}}\right]\right)\right);$

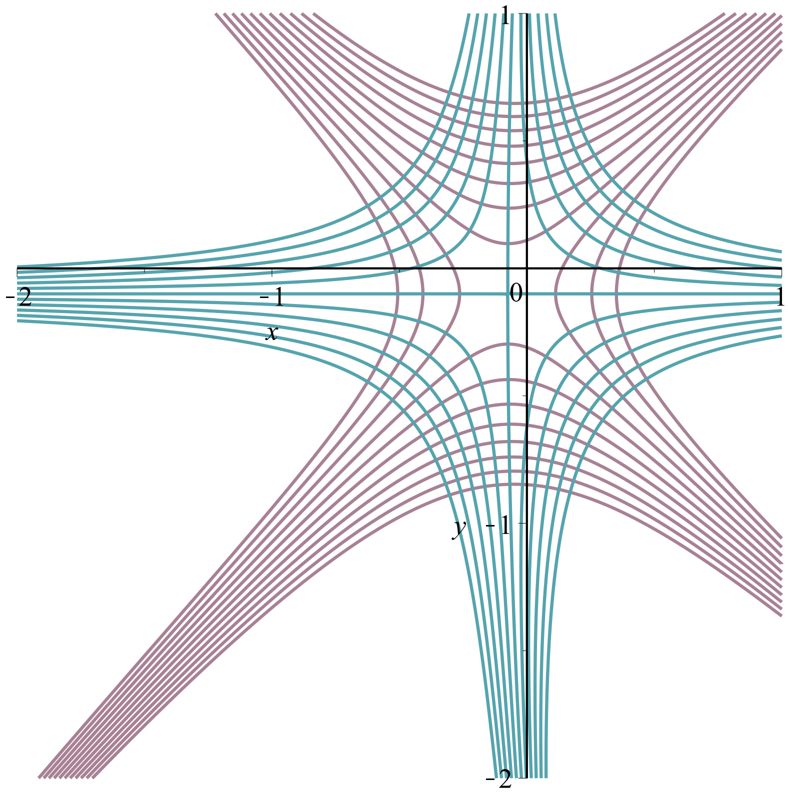
$$grph_2 := PLOT(\ldots) \tag{6}$$

> $display\left(grph_2, \text{title} = \text{"Линии уровня v=const"}\right)$



> $display\left(grph_1, grph_2, title = \text{"Убедитесь в ортогональности линий уровня u и v"}\right)$

Убедитесь в ортогональности линий уровня u и v



> $\#implicitplot\left(\left[op\left(ref_1\right), op\left(imf_1\right)\right], x=-1..2, y=-2..1, gridrefine=4, scaling=constrained,\right.$
$color = ColorTools:\text{-}Color\left(\left[\frac{rand()}{10^{12}}, \frac{rand()}{10^{12}}, \frac{rand()}{10^{12}}\right]\right), title =$
$\left.\text{'Ортогональность линий уровня'}\right)$

ПРОВЕРКА ТОЖДЕСТВА

> $eval\left(reeq, re_1\right)$

$$0 = 0 \tag{7}$$

> $simplify\left(eval\left(reeq, re_1\right), \text{'size'}\right)$

$$0 = 0 \tag{8}$$

> $eval\left(imeq, im_1\right)$

$$0 = 0 \tag{9}$$

> $simplify\left(eval\left(imeq, im_1\right), \text{'size'}\right)$

$$0 = 0 \tag{10}$$

> $eval\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y),\,re_1\right)$

$$\frac{3}{5}\,y+\frac{3}{50}=\frac{3}{5}\,y+\frac{3}{50} \tag{11}$$

```
> lhs((11)) - rhs((11)) = 0;
```

$$0=0 \tag{12}$$

> $eval\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y),\,im_1\right)$

$$-\frac{3}{5}\,x-\frac{339}{50}=-\frac{3}{5}\,x-\frac{339}{50} \tag{13}$$

```
> 0 = rhs((13)) - lhs((13));
```

$$0=0 \tag{14}$$

```
>
```