>

ЗАДАЧА # 1. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{1}{2}\, z - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\, \mathrm{I} + \frac{3}{10\left(z - \frac{3}{10} + \frac{4}{5}\, \mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\, v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, \phi(x, y) = 0$$

____

ЗАДАЧА # 2. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{2}{5}\, z - \frac{4}{25} + \frac{7}{25}\, \mathrm{I} - \frac{1}{2\left(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\, \mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\, v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{2}{5}, y = -\frac{1}{2}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, \phi(x, y) = 0$$

____

ЗАДАЧА # 3. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{4}{5}\, z - \frac{16}{25} - \frac{18}{25}\, \mathrm{I} + \frac{1}{10\left(z - \frac{1}{10} - \frac{2}{5}\, \mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\, v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{4}{5}, y = \frac{1}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y) = 0$$

_ _

ЗАДАЧА # 4. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{1}{5}\,z - \frac{1}{25} + \frac{2}{25}\,\mathrm{I}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y, \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{1}{5}, y = 0$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y) = 0$$

_ _

ЗАДАЧА # 5. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{3}{5}\,z - \frac{9}{25} + \frac{6}{25}\,\mathrm{I} - \frac{9}{10\left(z + \frac{9}{10} - \frac{3}{10}\,\mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y, \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{3}{5}, y = -\frac{9}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y) = 0$$

_ _

ЗАДАЧА # 6. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{3}{10} z - \frac{9}{100} + \frac{3}{25} \mathrm{I} - \frac{7}{10 \left(z + \frac{7}{10} - \frac{1}{2} \mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\, v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{3}{10}, y = -\frac{7}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0$$

_ _

ЗАДАЧА # 7. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = \frac{1}{5} z - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} \mathrm{I} + \frac{9}{10 \left(z - \frac{9}{10} + \frac{7}{10} \mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\, v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{1}{5}, y = \frac{9}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0$$

_ _

ЗАДАЧА # 8. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{7}{10} z - \frac{49}{100} - \frac{7}{20} \mathrm{I} - \frac{1}{2 \left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\, v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{7}{10}, y=-\frac{1}{2}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, \phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, \phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 9. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{1}{5}\, z - \frac{1}{25} - \frac{4}{25}\, \mathrm{I} + \frac{1}{2\left(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\, \mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}\, v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{1}{5}, y=\frac{1}{2}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, \phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, \phi(x,y) = 0$$

ЗАДАЧА # 10. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{3}{5}\, z - \frac{9}{25} + \frac{9}{50}\, \mathrm{I} + \frac{1}{5\left(z - \frac{1}{5} - \frac{9}{10}\, \mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}\, v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{3}{5}, y=\frac{1}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\, v(x,y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 11. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=-\frac{1}{10}\,z-\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\,\mathrm{I}+\frac{1}{5\left(z-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{1}{10},\ y=\frac{1}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$\text{"?"},\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y),\ \text{"?"}$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 12. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=\frac{4}{5}\,z-\frac{16}{25}-\frac{6}{25}\,\mathrm{I}+\frac{1}{10\left(z-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=\frac{4}{5},\ y=\frac{1}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$\text{"?"},\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,v(x,y),\ \text{"?"}$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 13. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=\frac{7}{10}\,z-\frac{49}{100}+\frac{7}{100}\,\mathrm{I}-\frac{4}{5\left(z+\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{7}{10}, y = -\frac{4}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0$$

_ _

ЗАДАЧА # 14. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{3}{5} z - \frac{9}{25} - \frac{9}{25} I - \frac{2}{5\left(z + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} I\right)}$$

Здесь:

$$z = x + I y, \phi(z) = u(x, y) + I v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{3}{5}, y = -\frac{2}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0$$

_ _

ЗАДАЧА # 15. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{4}{5} z - \frac{16}{25} - \frac{16}{25} I + \frac{3}{5\left(z - \frac{3}{5} - \frac{1}{10} I\right)}$$

Здесь:

$$z = x + I y, \phi(z) = u(x, y) + I v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 16. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=-\frac{7}{10}z-\frac{49}{100}+\frac{7}{25}\mathrm{I}-\frac{1}{2\left(z+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{7}{10},\ y=-\frac{1}{2}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?",\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y),\ "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 17. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=-\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\mathrm{I}+\frac{3}{5\left(z-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?",\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y),\ "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 18. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=\frac{1}{10}z-\frac{1}{100}+\frac{1}{25}\mathrm{I}+\frac{1}{10\left(z-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = \frac{1}{10}, y = \frac{1}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0$$

ЗАДАЧА # 19. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{1}{10} z - \frac{1}{100} + \frac{2}{25} \mathrm{I} - \frac{7}{10 \left(z + \frac{7}{10} - \frac{7}{10} \mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\, v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{1}{10}, y = -\frac{7}{10}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0$$

ЗАДАЧА # 20. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z) = -\frac{4}{5} z - \frac{16}{25} + \frac{14}{25} \mathrm{I} - \frac{3}{5 \left(z + \frac{3}{5} + \frac{7}{10} \mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\, y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\, v(x, y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$"?", \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} v(x, y), "?"$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)=0$$

ЗАДАЧА # 21. Построить линии уровня потенциала:

$$\phi(z)=-\frac{4}{5}z-\frac{16}{25}+\frac{14}{25}\mathrm{I}+\frac{1}{5\left(z-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)}$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Построить касательную плоскость к поверхностям u и v в точке с координатами:

$$x=-\frac{4}{5},\ y=\frac{1}{5}$$

Проверить равенство смешанных производных, как для действительной u, так и мнимой v части потенциала, т.е.:

$$\text{"?"},\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y),\ \text{"?"}$$

Проверить, удовлетворяет ли действительная u, и мнимая v части потенциала уравнению Лапласа, вот оно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)=0$$

Пример: РГР # 13

> $N := NumTask - 8$

$$N := 13 \quad (1)$$

> $\phi := g_N$

$$\phi := \frac{7}{10}z-\frac{49}{100}+\frac{7}{100}\mathrm{I}-\frac{4}{5\left(z+\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\mathrm{I}\right)} \quad (2)$$

> $re_1 := re_N;\ im_1 := im_N;\ X_1 := X_N;\ Y_1 := Y_N$

$$re_1 := u(x,y)=-\frac{49}{100}+\frac{7}{10}x-\frac{4}{5}\,\frac{x+\frac{4}{5}}{\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2}$$

$$im_1 := v(x,y)=\frac{7}{100}+\frac{7}{10}y+\frac{4}{5}\,\frac{y+\frac{1}{10}}{\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2}$$

$$X_1 := \frac{7}{10}$$

$$Y_1 := -\frac{4}{5} \quad (3)$$

> $gthree_1 := pointplot3d(\{[X_1, Y_1, eval(rhs(re_1), [x=X_1, y=Y_1])]\}, axes=normal, symbol=solidcircle, symbolsize=25, color=red)$:

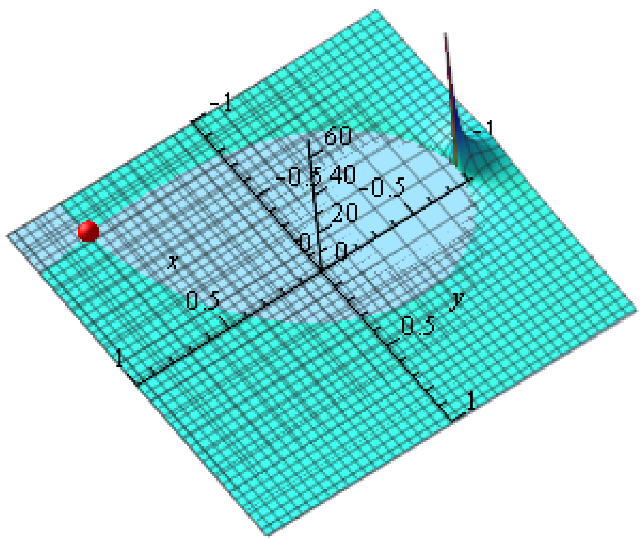
> $gthree_2 := plot3d\left(rhs\left(re_1\right), x=-1..1, y=-1..1, grid=[200, 200], color=rhs\left(re_1\right)\right):$

> $gthree_3 := plot3d\left(eval\left(rhs\left(re_1\right), \left[x=X_1, y=Y_1\right]\right) + eval\left(\frac{\partial}{\partial x}\, rhs\left(re_1\right), \left[x=X_1, y=Y_1\right]\right)\cdot\left(x - X_1\right) + eval\left(\frac{\partial}{\partial y}\, rhs\left(re_1\right), \left[x=X_1, y=Y_1\right]\right)\cdot\left(y - Y_1\right), x=-1..1, y=-1..1, grid=[50, 50], color=\text{"SkyBlue"}\right):$

> $\left[x=X_1, y=Y_1\right]$

$$\left[x=\frac{7}{10}, y=-\frac{4}{5}\right] \tag{4}$$

> $display\left(gthree_1, gthree_2, gthree_3, caption=\text{'}\mathit{Касательная\ плоскость}\ \text{в}\ \mathit{заданной\ точке}\ \left[x=X_1, y=Y_1\right]\text{'}\right)$



Касательная плоскость в заданной точке $\left[x=X_1, y=Y_1\right]$

> $ref_1 := \left[seq\left(rhs\left(re_1\right) = 0.250\cdot i, i=-5..5\right)\right]:$

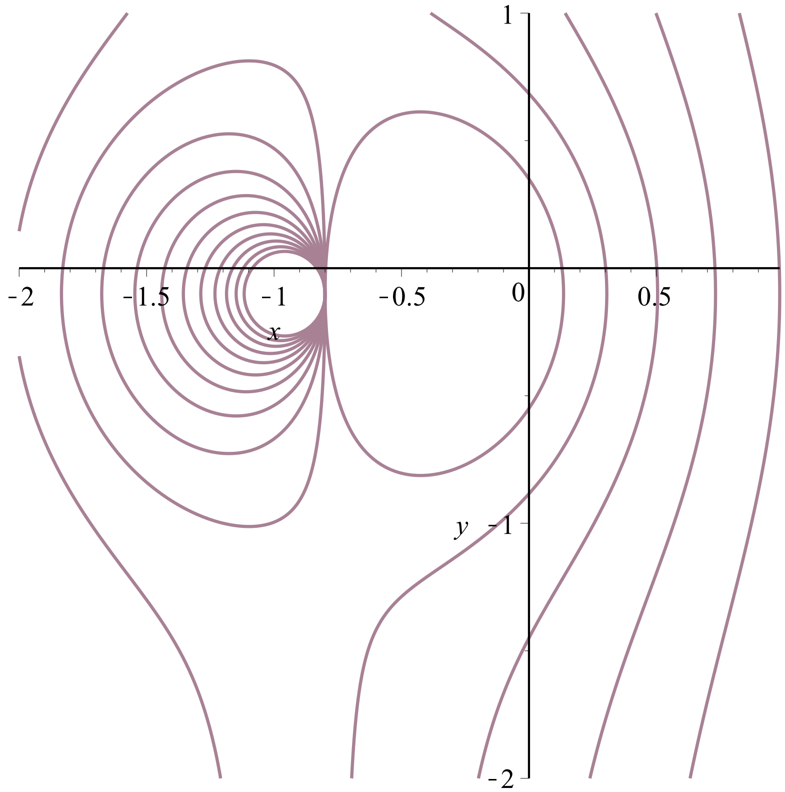
> $grph_1 := implicitplot\left(ref_1, x=-2..1, y=-2..1, gridrefine=4, scaling=constrained, color = ColorTools\text{:-}Color\left(\left[\frac{rand(\,)}{10^{12}}, \frac{rand(\,)}{10^{12}}, \frac{rand(\,)}{10^{12}}\right]\right), coloring=[\text{"White"},\right.$

"DarkViolet"]);

$$grph_1 := PLOT(\ldots) \tag{5}$$

> $display(grph_1,$ title = "Линии уровня u=const")

Линии уровня u=const



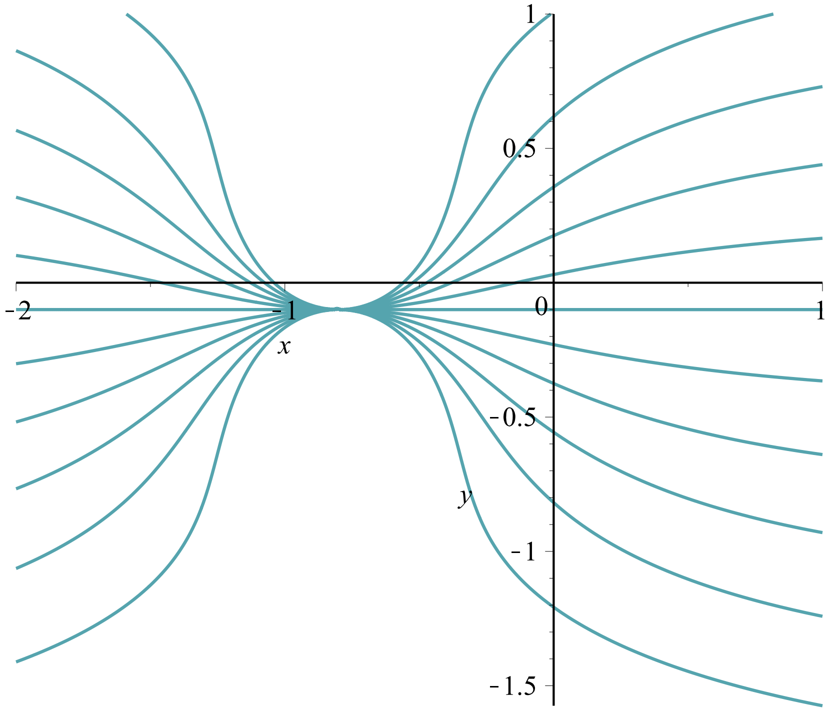
> $imf_1 := [seq(rhs(im_1) = 0.250 \cdot i, i = -5 .. 5)]:$

> $grph_2 := implicitplot\left(imf_1, x = -2 ..1, y = -2 ..1, gridrefine = 4, scaling = constrained, color = ColorTools{:-}Color\left(\left[\frac{rand(\,)}{10^{12}}, \frac{rand(\,)}{10^{12}}, \frac{rand(\,)}{10^{12}}\right]\right)\right);$

$$grph_2 := PLOT(\ldots) \tag{6}$$

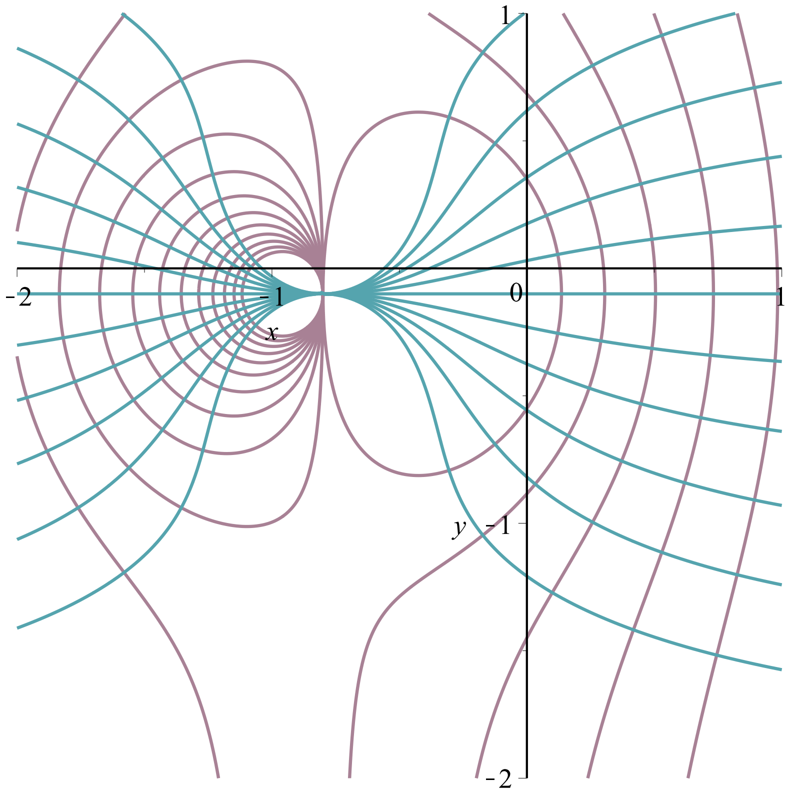
> $display(grph_2,$ title = "Линии уровня v=const")

Линии уровня v=const



> $display\left(grph_1, grph_2, title = \text{"Убедитесь в ортогональности линий уровня u и v"}\right)$

Убедитесь в ортогональности линий уровня u и v



> $\#implicitplot\left(\left[op\left(ref_1\right), op\left(imf_1\right)\right], x=-1..2, y=-2..1, gridrefine=4, scaling=constrained, color=ColorTools\text{:-}Color\left(\left[\frac{rand(\,)}{10^{12}}, \frac{rand(\,)}{10^{12}}, \frac{rand(\,)}{10^{12}}\right]\right), title='\text{Ортогональность линий уровня}'\right)$

ПРОВЕРКА ТОЖДЕСТВА

> $eval(reeq, re_1)$

$$\frac{8}{5}\,\frac{2x+\frac{8}{5}}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^2}-\frac{8}{5}\,\frac{\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(2x+\frac{8}{5}\right)^2}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^3}+\frac{16}{5}\,\frac{x+\frac{4}{5}}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^2}-\frac{8}{5}\,\frac{\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(2y+\frac{1}{5}\right)^2}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^3}=0 \tag{7}$$

> $simplify\left(eval\left(reeq, re_1\right),'size'\right)$

$$0=0 \tag{8}$$

> $eval\left(imeq, im_1\right)$

$$\frac{8}{5}\frac{\left(y+\frac{1}{10}\right)\left(2x+\frac{8}{5}\right)^2}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^3}-\frac{16}{5}\frac{y+\frac{1}{10}}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^2}-\frac{8}{5}\frac{2y+\frac{1}{5}}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^2}+\frac{8}{5}\frac{\left(y+\frac{1}{10}\right)\left(2y+\frac{1}{5}\right)^2}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^3}=0 \tag{9}$$

> $simplify\left(eval\left(imeq, im_1\right),'size'\right)$

$$0=0 \tag{10}$$

> $eval\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y), re_1\right)$

$$\frac{4}{5}\frac{2y+\frac{1}{5}}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^2}-\frac{8}{5}\frac{\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(2x+\frac{8}{5}\right)\left(2y+\frac{1}{5}\right)}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^3}=\frac{4}{5}\frac{2y+\frac{1}{5}}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^2}-\frac{8}{5}\frac{\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(2x+\frac{8}{5}\right)\left(2y+\frac{1}{5}\right)}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^3} \tag{11}$$

```
> lhs((11)) - rhs((11)) = 0;
```

$$0=0 \tag{12}$$

> $eval\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}v(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}v(x,y), im_1\right)$

$$-\frac{4}{5}\frac{2x+\frac{8}{5}}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^2}+\frac{8}{5}\frac{\left(y+\frac{1}{10}\right)\left(2x+\frac{8}{5}\right)\left(2y+\frac{1}{5}\right)}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^3}=-\frac{4}{5}\frac{2x+\frac{8}{5}}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^2}+\frac{8}{5}\frac{\left(y+\frac{1}{10}\right)\left(2x+\frac{8}{5}\right)\left(2y+\frac{1}{5}\right)}{\left(\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{1}{10}\right)^2\right)^3} \tag{13}$$

```
> 0 = rhs((13)) - lhs((13));
```

$$0=0 \tag{14}$$

>