Задача на экстремумы # 1. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:
Потенциал:

$$\phi(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3 + \frac{3}{10}\left(z - \frac{3}{10} + \frac{4}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 1. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = \frac{17}{40} + \frac{1}{40}\,\mathrm{I}\sqrt{15}, y = -\frac{11}{20} + \frac{1}{20}\,\mathrm{I}\sqrt{15}\right\}, \left\{x = \frac{17}{40} - \frac{1}{20}\sqrt{15}, y = -\frac{11}{20} + \frac{1}{40}\sqrt{15}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = -\frac{9}{25}\,x + \frac{129}{125}\,y - \frac{51}{50}\,x^2 + \frac{51}{50}\,y^2 + \frac{1111}{5000} - \frac{66}{25}\,x\,y - \frac{12}{5}\,x\,y^2 + \frac{4}{5}\,x^3, v(x, y) = -\frac{33}{25}\,y^2 - \frac{129}{125}\,x + \frac{73}{2500} - \frac{4}{5}\,y^3 + \frac{33}{25}\,x^2 - \frac{9}{25}\,y + \frac{12}{5}\,x^2\,y - \frac{51}{25}\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = \frac{17}{40} - \frac{1}{20}\sqrt{15}, y = -\frac{11}{20} + \frac{1}{40}\sqrt{15}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

Задача на экстремумы # 2. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:
Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{2}{5}\left(z + \frac{2}{5} - \frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 2. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = -\frac{41}{90} + \frac{1}{45}\,\mathrm{I}\sqrt{5}, y = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\,\mathrm{I}\sqrt{5}\right\}, \left\{x = -\frac{41}{90} + \frac{1}{5}\sqrt{5}, y = \frac{1}{5} - \frac{1}{45}\sqrt{5}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = \frac{81}{1000}\,x - \frac{93}{250}\,y + \frac{1771}{10000} - \frac{123}{100}\,x^2 + \frac{123}{100}\,y^2 - \frac{27}{25}\,x\,y + \frac{27}{10}\,x\,y^2 - \frac{9}{10}\,x^3,$$

$$v(x, y) = -\frac{369}{5000} - \frac{27}{50}\,y^2 + \frac{93}{250}\,x + \frac{9}{10}\,y^3 + \frac{27}{50}\,x^2 + \frac{81}{1000}\,y - \frac{27}{10}\,x^2\,y - \frac{123}{50}\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = -\frac{41}{90} + \frac{1}{5}\sqrt{5}, y = \frac{1}{5} - \frac{1}{45}\sqrt{5}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

Задача на экстремумы # 3. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:
Потенциал:

$$\phi(z) = \frac{4}{5}\left(z - \frac{4}{5} - \frac{9}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 + \frac{1}{10}\left(z - \frac{1}{10} - \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}\,v(x,y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 3. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = \frac{13}{18} + \frac{7}{45}\,\mathrm{I}\sqrt{2},\ y = \frac{38}{45} + \frac{1}{9}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right\},\ \left\{x = \frac{13}{18} + \frac{1}{9}\sqrt{2},\ y = \frac{38}{45} - \frac{7}{45}\sqrt{2}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x,y) = -\frac{453}{1000}\,x - \frac{87}{25}\,y + \frac{11503}{10000} - \frac{39}{20}\,x^2 + \frac{39}{20}\,y^2 + \frac{114}{25}\,x\,y - \frac{27}{10}\,x\,y^2 + \frac{9}{10}\,x^3,$$

$$v(x,y) = -\frac{397}{500} + \frac{57}{25}\,y^2 + \frac{87}{25}\,x - \frac{9}{10}\,y^3 - \frac{57}{25}\,x^2 - \frac{453}{1000}\,y + \frac{27}{10}\,x^2\,y - \frac{39}{10}\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = \frac{13}{18} + \frac{1}{9}\sqrt{2},\ y = \frac{38}{45} - \frac{7}{45}\sqrt{2}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

_ _

Задача на экстремумы # 4. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{1}{5}\left(z + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}\,v(x,y)$$

FALSE CASE:

Задача на экстремумы # 5. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = \frac{3}{5}\left(z - \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{9}{10}\left(z + \frac{9}{10} - \frac{3}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}\,v(x,y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 5. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = -\frac{39}{10} - \frac{3}{2}\sqrt{6},\ y = \frac{17}{10} + \frac{7}{10}\sqrt{6}\right\},\ \left\{x = -\frac{39}{10} + \frac{7}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{6},\ y = \frac{17}{10} + \frac{3}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{6}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x,y) = -\frac{198}{125}\,x - \frac{297}{500}\,y - \frac{1971}{5000} - \frac{351}{100}\,x^2 + \frac{351}{100}\,y^2 - \frac{153}{50}\,x\,y + \frac{9}{10}\,x\,y^2 - \frac{3}{10}\,x^3,$$

$$v(x,y) = \frac{4263}{5000} - \frac{153}{100}\,y^2 + \frac{297}{500}\,x + \frac{3}{10}\,y^3 + \frac{153}{100}\,x^2 - \frac{198}{125}\,y - \frac{9}{10}\,x^2\,y - \frac{351}{50}\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = -\frac{39}{10} - \frac{3}{2}\sqrt{6},\ y = \frac{17}{10} + \frac{7}{10}\sqrt{6}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

Задача на экстремумы # 6. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{3}{10}\left(z+\frac{3}{10}-\frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3-\frac{7}{10}\left(z+\frac{7}{10}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 6. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x=-\frac{29}{50}-\frac{1}{25}\,\mathrm{I}\sqrt{21},\ y=\frac{47}{100}+\frac{1}{100}\,\mathrm{I}\sqrt{21}\right\},\ \left\{x=-\frac{29}{50}-\frac{1}{100}\sqrt{21},\ y=\frac{47}{100}-\frac{1}{25}\sqrt{21}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x,y)=-\frac{441}{1000}\,x-\frac{843}{500}\,y+\frac{13}{80}-\frac{87}{50}\,x^2+\frac{87}{50}\,y^2-\frac{141}{50}\,x\,y+3\,x\,y^2-x^3,\ v(x,y)=\frac{2201}{5000}-\frac{141}{100}\,y^2+\frac{843}{500}\,x+y^3+\frac{141}{100}\,x^2-\frac{441}{1000}\,y-3\,x^2\,y-\frac{87}{25}\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x=-\frac{29}{50}-\frac{1}{100}\sqrt{21},\ y=\frac{47}{100}-\frac{1}{25}\sqrt{21}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

Задача на экстремумы # 7. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z)=\frac{1}{5}\left(z-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)^3+\frac{9}{10}\left(z-\frac{9}{10}+\frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 7. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x=\frac{17}{22}-\frac{21}{110}\,\mathrm{I}\sqrt{2},\ y=-\frac{67}{110}+\frac{3}{22}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right\},\ \left\{x=\frac{17}{22}+\frac{3}{22}\sqrt{2},\ y=-\frac{67}{110}+\frac{21}{110}\sqrt{2}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x,y)=\frac{69}{20}\,y-\frac{51}{20}\,x^2+\frac{51}{20}\,y^2+\frac{2689}{5000}-\frac{201}{50}\,x\,y-\frac{33}{10}\,x\,y^2+\frac{11}{10}\,x^3+\frac{108}{125}\,x,\ v(x,y)=-\frac{201}{100}\,y^2+\frac{6127}{5000}-\frac{69}{20}\,x-\frac{11}{10}\,y^3+\frac{201}{100}\,x^2+\frac{33}{10}\,x^2\,y-\frac{51}{10}\,x\,y+\frac{108}{125}\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x=\frac{17}{22}+\frac{3}{22}\sqrt{2},\ y=-\frac{67}{110}+\frac{21}{110}\sqrt{2}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

Задача на экстремумы # 8. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:
Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{7}{10}\left(z + \frac{7}{10} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 8. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = -\frac{37}{60} + \frac{1}{60}\,\mathrm{I}\sqrt{35},\ y = -\frac{7}{24} + \frac{1}{24}\,\mathrm{I}\sqrt{35}\right\}, \left\{x = -\frac{37}{60} - \frac{1}{24}\sqrt{35},\ y = -\frac{7}{24} + \frac{1}{60}\sqrt{35}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = -\frac{879}{1000}\,x + \frac{147}{100}\,y + \frac{649}{10000} - \frac{111}{50}\,x^2 + \frac{111}{50}\,y^2 + \frac{21}{10}\,x\,y + \frac{18}{5}\,x\,y^2 - \frac{6}{5}\,x^3,$$
$$v(x, y) = -\frac{427}{1000} + \frac{21}{20}\,y^2 - \frac{147}{100}\,x + \frac{6}{5}\,y^3 - \frac{21}{20}\,x^2 - \frac{879}{1000}\,y - \frac{18}{5}\,x^2\,y - \frac{111}{25}\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = -\frac{37}{60} - \frac{1}{24}\sqrt{35},\ y = -\frac{7}{24} + \frac{1}{60}\sqrt{35}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

Задача на экстремумы # 9. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:
Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{1}{5}\left(z + \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\,\mathrm{I}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 9. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = \frac{29}{30} - \frac{7}{30}\,\mathrm{I}\sqrt{10},\ y = \frac{11}{30} + \frac{7}{30}\,\mathrm{I}\sqrt{10}\right\}, \left\{x = \frac{29}{30} + \frac{7}{30}\sqrt{10},\ y = \frac{11}{30} + \frac{7}{30}\sqrt{10}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = \frac{18}{25}\,x + \frac{171}{500}\,y + \frac{101}{5000} - \frac{87}{100}\,x^2 + \frac{87}{100}\,y^2 + \frac{33}{50}\,x\,y - \frac{9}{10}\,x\,y^2 + \frac{3}{10}\,x^3,\ v(x, y) = \frac{601}{5000} + \frac{33}{100}\,y^2 - \frac{171}{500}\,x - \frac{3}{10}\,y^3 - \frac{33}{100}\,x^2 + \frac{18}{25}\,y + \frac{9}{10}\,x^2\,y - \frac{87}{50}\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = \frac{29}{30} + \frac{7}{30}\sqrt{10},\ y = \frac{11}{30} + \frac{7}{30}\sqrt{10}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

Задача на экстремумы # 10. Найти все точки экстремума функций u

и v. Определить тип экстремума:
Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{3}{5}\left(z+\frac{3}{5}-\frac{3}{10}\,\mathrm{I}\right)^3+\frac{1}{5}\left(z-\frac{1}{5}-\frac{9}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 10. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x=-\frac{3}{10}\sqrt{-3}-1,\ y=\frac{2}{5}\sqrt{-3}\right\},\ \left\{x=\frac{2}{5}\sqrt{3}-1,\ y=\frac{3}{10}\sqrt{3}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x,y)=-\frac{237}{250}\,x-\frac{108}{125}\,y+\frac{79}{1250}-\frac{6}{5}\,x^2+\frac{6}{5}\,y^2+\frac{6}{5}\,x\,y^2-\frac{2}{5}\,x^3,\ v(x,y)=\frac{189}{625}+\frac{108}{125}\,x+\frac{2}{5}\,y^3-\frac{237}{250}\,y-\frac{6}{5}\,x^2\,y-\frac{12}{5}\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x=\frac{2}{5}\sqrt{3}-1,\ y=\frac{3}{10}\sqrt{3}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

_ _

Задача на экстремумы # 11. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:
Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{1}{10}\left(z+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3+\frac{1}{5}\left(z-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z=x+\mathrm{I}\,y,\ \phi(z)=u(x,y)+\mathrm{I}\,v(x,y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 11. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{2},\ y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{2}\right\},\ \left\{x=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{2},\ y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x,y)=\frac{21}{500}\,y-\frac{3}{20}\,x^2+\frac{3}{20}\,y^2+\frac{17}{5000}-\frac{3}{10}\,x\,y-\frac{3}{10}\,x\,y^2+\frac{1}{10}\,x^3,\ v(x,y)=-\frac{3}{20}\,y^2+\frac{17}{5000}-\frac{21}{500}\,x-\frac{1}{10}\,y^3+\frac{3}{20}\,x^2+\frac{3}{10}\,x^2\,y-\frac{3}{10}\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{2},\ y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{2}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

_ _

Задача на экстремумы # 12. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:
Потенциал:

$$\phi(z) = \frac{4}{5}\left(z-\frac{4}{5}-\frac{3}{10}\,\mathrm{I}\right)^3+\frac{1}{10}\left(z-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + I\, y, \phi(z) = u(x, y) + I\, v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 12. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = \frac{13}{18} + \frac{7}{45} I\sqrt{2}, y = \frac{11}{45} + \frac{1}{9} I\sqrt{2}\right\}, \left\{x = \frac{13}{18} + \frac{1}{9}\sqrt{2}, y = \frac{11}{45} - \frac{7}{45}\sqrt{2}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = \frac{1311}{1000} x - \frac{57}{50} y - \frac{2357}{10000} - \frac{39}{20} x^2 + \frac{39}{20} y^2 + \frac{33}{25} x y - \frac{27}{10} x y^2 + \frac{9}{10} x^3, v(x, y) = -\frac{2197}{5000} + \frac{33}{50} y^2 + \frac{57}{50} x - \frac{9}{10} y^3 - \frac{33}{50} x^2 + \frac{1311}{1000} y + \frac{27}{10} x^2 y - \frac{39}{10} x y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = \frac{13}{18} + \frac{1}{9}\sqrt{2}, y = \frac{11}{45} - \frac{7}{45}\sqrt{2}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

Задача на экстремумы # 13. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = \frac{7}{10}\left(z - \frac{7}{10} + \frac{1}{10} I\right)^3 - \frac{4}{5}\left(z + \frac{4}{5} + \frac{1}{10} I\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + I\, y, \phi(z) = u(x, y) + I\, v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 13. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = -\frac{113}{10} + 3\sqrt{14}, y = -\frac{1}{10}\right\}, \left\{x = -\frac{113}{10}, y = -\frac{1}{10} + 3 I\sqrt{14}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = -\frac{63}{125} x + \frac{339}{500} y - \frac{3079}{5000} - \frac{339}{100} x^2 + \frac{339}{100} y^2 + \frac{3}{50} x y + \frac{3}{10} x y^2 - \frac{1}{10} x^3,$$

$$v(x, y) = -\frac{253}{5000} + \frac{3}{100} y^2 - \frac{339}{500} x + \frac{1}{10} y^3 - \frac{3}{100} x^2 - \frac{63}{125} y - \frac{3}{10} x^2 y - \frac{339}{50} x y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = -\frac{113}{10} + 3\sqrt{14}, y = -\frac{1}{10}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

Задача на экстремумы # 14. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{3}{5}\left(z + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} I\right)^3 - \frac{2}{5}\left(z + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} I\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + I\, y, \phi(z) = u(x, y) + I\, v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 14. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = -\frac{13}{25} + \frac{1}{25}\,\mathrm{I}\sqrt{6},\, y = -\frac{3}{5}\right\}, \left\{x = -\frac{13}{25},\, y = -\frac{3}{5} + \frac{1}{25}\sqrt{6}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = \frac{234}{125}\,y - \frac{39}{25}\,x^2 + \frac{39}{25}\,y^2 + \frac{254}{625} + \frac{18}{5}\,x\,y + 3\,x\,y^2 - x^3 + \frac{6}{25}\,x,\; v(x, y) = \frac{9}{5}\,y^2 - \frac{36}{125} - \frac{234}{125}\,x + y^3 - \frac{9}{5}\,x^2 - 3\,x^2\,y - \frac{78}{25}\,x\,y + \frac{6}{25}\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = -\frac{13}{25},\, y = -\frac{3}{5} + \frac{1}{25}\sqrt{6}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

_ _

Задача на экстремумы # 15. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{4}{5}\left(z + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\,\mathrm{I}\right)^3 + \frac{3}{5}\left(z - \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 15. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = -5 + \frac{14}{5}\sqrt{3},\, y = -\frac{7}{2} + \frac{9}{5}\sqrt{3}\right\}, \left\{x = -5 - \frac{9}{5}\,\mathrm{I}\sqrt{3},\, y = -\frac{7}{2} + \frac{14}{5}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = \frac{357}{125}\,y - 3\,x^2 + 3\,y^2 + \frac{1751}{2500} + \frac{21}{5}\,x\,y + \frac{3}{5}\,x\,y^2 - \frac{1}{5}\,x^3 + \frac{63}{100}\,x,\; v(x, y) = \frac{21}{10}\,y^2 - \frac{4417}{5000} - \frac{357}{125}\,x + \frac{1}{5}\,y^3 - \frac{21}{10}\,x^2 - \frac{3}{5}\,x^2\,y - 6\,x\,y + \frac{63}{100}\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = -5 + \frac{14}{5}\sqrt{3},\, y = -\frac{7}{2} + \frac{9}{5}\sqrt{3}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

_ _

Задача на экстремумы # 16. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{7}{10}\left(z + \frac{7}{10} - \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\, \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 16. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = -\frac{37}{60} - \frac{1}{60}\,\mathrm{I}\sqrt{35},\, y = \frac{13}{120} + \frac{7}{120}\,\mathrm{I}\sqrt{35}\right\}, \left\{x = -\frac{37}{60} - \frac{7}{120}\sqrt{35},\, y = \frac{13}{120} - \frac{1}{60}\sqrt{35}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x,y) = -\frac{933}{1000}x - \frac{363}{500}y + \frac{1}{10000} - \frac{111}{50}x^2 + \frac{111}{50}y^2 - \frac{39}{50}xy + \frac{18}{5}xy^2 - \frac{6}{5}x^3,$$

$$v(x,y) = \frac{1339}{5000} - \frac{39}{100}y^2 + \frac{363}{500}x + \frac{6}{5}y^3 + \frac{39}{100}x^2 - \frac{933}{1000}y - \frac{18}{5}x^2y - \frac{111}{25}xy$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = -\frac{37}{60} - \frac{7}{120}\sqrt{35},\, y = \frac{13}{120} - \frac{1}{60}\sqrt{35}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

_ _

Задача на экстремумы # 17. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\mathrm{I}\right)^3 + \frac{3}{5}\left(z - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}y,\, \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}v(x,y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 17. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = \frac{61}{10} - \frac{11}{10}\sqrt{30},\, y = -\frac{41}{10} + \frac{7}{10}\sqrt{30}\right\}, \left\{x = \frac{61}{10} + \frac{7}{10}\mathrm{I}\sqrt{30},\, y = -\frac{41}{10} + \frac{11}{10}\mathrm{I}\sqrt{30}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x,y) = -\frac{9}{25}x + \frac{573}{500}y + \frac{1021}{5000} - \frac{183}{100}x^2 + \frac{183}{100}y^2 - \frac{123}{50}xy - \frac{3}{10}xy^2 + \frac{1}{10}x^3,$$

$$v(x,y) = \frac{1481}{5000} - \frac{123}{100}y^2 - \frac{573}{500}x - \frac{1}{10}y^3 + \frac{123}{100}x^2 - \frac{9}{25}y + \frac{3}{10}x^2y - \frac{183}{50}xy$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = \frac{61}{10} - \frac{11}{10}\sqrt{30},\, y = -\frac{41}{10} + \frac{7}{10}\sqrt{30}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

_ _

Задача на экстремумы # 18. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = \frac{1}{10}\left(z - \frac{1}{10} + \frac{2}{5}\mathrm{I}\right)^3 + \frac{1}{10}\left(z - \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}y,\, \phi(z) = u(x,y) + \mathrm{I}v(x,y)$$

FALSE CASE:

Задача на экстремумы # 19. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{1}{10}\left(z + \frac{1}{10} - \frac{4}{5}\mathrm{I}\right)^3 - \frac{7}{10}\left(z + \frac{7}{10} - \frac{7}{10}\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 19. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = -\frac{5}{8} + \frac{3}{40}\,\mathrm{I}\sqrt{7},\ y = \frac{57}{80} + \frac{1}{80}\,\mathrm{I}\sqrt{7}\right\}, \left\{x = -\frac{5}{8} + \frac{1}{80}\sqrt{7},\ y = \frac{57}{80} - \frac{3}{40}\sqrt{7}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = \frac{189}{1000}\,x - \frac{1053}{500}\,y + \frac{4993}{10000} - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{3}{2}\,y^2 - \frac{171}{50}\,x\,y + \frac{12}{5}\,x\,y^2 - \frac{4}{5}\,x^3,\ v(x, y) = \frac{2157}{5000} - \frac{171}{100}\,y^2 + \frac{1053}{500}\,x + \frac{4}{5}\,y^3 + \frac{171}{100}\,x^2 + \frac{189}{1000}\,y - \frac{12}{5}\,x^2\,y - 3\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = -\frac{5}{8} + \frac{1}{80}\sqrt{7},\ y = \frac{57}{80} - \frac{3}{40}\sqrt{7}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

_ _

Задача на экстремумы # 20. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{4}{5}\left(z + \frac{4}{5} - \frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{3}{5}\left(z + \frac{3}{5} + \frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

Ответ к ЗАДАЧЕ # 20. Особые точки функции u таковы

$$\left[\left\{x = -\frac{5}{7} - \frac{2}{35}\,\mathrm{I}\sqrt{3},\ y = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right\}, \left\{x = -\frac{5}{7} - \frac{2}{5}\sqrt{3},\ y = \frac{1}{10} - \frac{2}{35}\sqrt{3}\right\}\right]$$

Действительная и мнимая части потенциала:

$$u(x, y) = -\frac{63}{500}\,x - \frac{147}{125}\,y + \frac{2327}{2500} - 3\,x^2 + 3\,y^2 - \frac{21}{25}\,x\,y + \frac{21}{5}\,x\,y^2 - \frac{7}{5}\,x^3,\ v(x, y) = \frac{553}{1000} - \frac{21}{50}\,y^2 + \frac{147}{125}\,x + \frac{7}{5}\,y^3 + \frac{21}{50}\,x^2 - \frac{63}{500}\,y - \frac{21}{5}\,x^2\,y - 6\,x\,y$$

Действительное решение для функции u таково:

$$\left\{x = -\frac{5}{7} - \frac{2}{5}\sqrt{3},\ y = \frac{1}{10} - \frac{2}{35}\sqrt{3}\right\}$$

по функции u точка перевала

по функции v точка некого типа

_ _

Задача на экстремумы # 21. Найти все точки экстремума функций u и v. Определить тип экстремума:

Потенциал:

$$\phi(z) = -\frac{4}{5}\left(z + \frac{4}{5} - \frac{7}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(z - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^3$$

Здесь:

$$z = x + \mathrm{I}\,y,\ \phi(z) = u(x, y) + \mathrm{I}\,v(x, y)$$

FALSE CASE:

Пример # 13

> $N := NumTask - 8$

(1)

$$N := 13 \quad \textbf{(1)}$$

$> \phi := g_N$

$$\phi := \frac{7}{10}\left(z - \frac{7}{10} + \frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 - \frac{4}{5}\left(z + \frac{4}{5} + \frac{1}{10}\,\mathrm{I}\right)^3 \quad \textbf{(2)}$$

$> re_1 := re_N;\ im_1 := im_N;$

$$re_1 := u(x,y) = -\frac{63}{125}\,x + \frac{339}{500}\,y - \frac{3079}{5000} - \frac{339}{100}\,x^2 + \frac{339}{100}\,y^2 + \frac{3}{50}\,x\,y + \frac{3}{10}\,x\,y^2 - \frac{1}{10}\,x^3$$

$$im_1 := v(x,y) = -\frac{253}{5000} + \frac{3}{100}\,y^2 - \frac{339}{500}\,x + \frac{1}{10}\,y^3 - \frac{3}{100}\,x^2 - \frac{63}{125}\,y - \frac{3}{10}\,x^2\,y - \frac{339}{50}\,x\,y \quad \textbf{(3)}$$

Стационарные точки по $u(x,y)$ и по $v(x,y)$

$> convert\left(\left[solve\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{rhs}(re_1),\ \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{rhs}(re_1)\right], \{x,y\}\right)\right], 'radical'\right);$
$convert\left(\left[solve\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{rhs}(im_1),\ \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{rhs}(im_1)\right], \{x,y\}\right)\right], 'radical'\right)$

$$\left[\left\{x = -\frac{113}{10} + 3\sqrt{14},\ y = -\frac{1}{10}\right\},\ \left\{x = -\frac{113}{10},\ y = -\frac{1}{10} + 3\,\mathrm{I}\sqrt{14}\right\}\right]$$

$$\left[\left\{x = -\frac{113}{10} + 3\sqrt{14},\ y = -\frac{1}{10}\right\},\ \left\{x = -\frac{113}{10},\ y = -\frac{1}{10} + 3\,\mathrm{I}\sqrt{14}\right\}\right] \quad \textbf{(4)}$$

$> XU_1 := rhs\left(convert\left(solve\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{rhs}(re_1),\ \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{rhs}(re_1)\right], \{x,y\}\right)_1, 'radical'\right)_1\right) : YU_1$
$:= rhs\left(convert\left(solve\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{rhs}(re_1),\ \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{rhs}(re_1)\right], \{x,y\}\right)_1, 'radical'\right)_2\right) :$

$> XV_1 := rhs\left(convert\left(solve\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{rhs}(im_1),\ \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{rhs}(im_1)\right], \{x,y\}\right)_1, 'radical'\right)_1\right) : YV_1$
$:= rhs\left(convert\left(solve\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{rhs}(im_1),\ \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{rhs}(im_1)\right], \{x,y\}\right)_1, 'radical'\right)_2\right) :$

Тип точки по $u(x,y)$ и по $v(x,y)$

$> \textbf{if}\ \left(\left(evalf_5\left(eval\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{rhs}(re_1)\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{rhs}(re_1) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{rhs}(re_1)\right)^2\right), solU_1\right)\right) > 0\right.\right.$
$\left.\left.\textbf{and}\ evalf_5\left(eval\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{rhs}(re_1)\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{rhs}(re_1), solU_1\right)\right) > 0\right)\right)\ \textbf{then}\ print(minmaxU);$
$\textbf{else}\ print('перевал');\ \textbf{end if};$

$$перевал \quad \textbf{(5)}$$

> **if** $\left(\left(evalf_5\left(eval\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{rhs}(im_1)\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{rhs}(im_1) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{rhs}(im_1)\right)^2\right), solV_1\right)\right) > 0\right.\right.$ **and** $\left.\left. evalf_5\left(eval\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{rhs}(im_1)\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{rhs}(im_1), solV_1\right)\right) > 0\right)\right)$ **then** $print(minmaxV)$;
else $print(\text{'перевал'})$; **end if**;

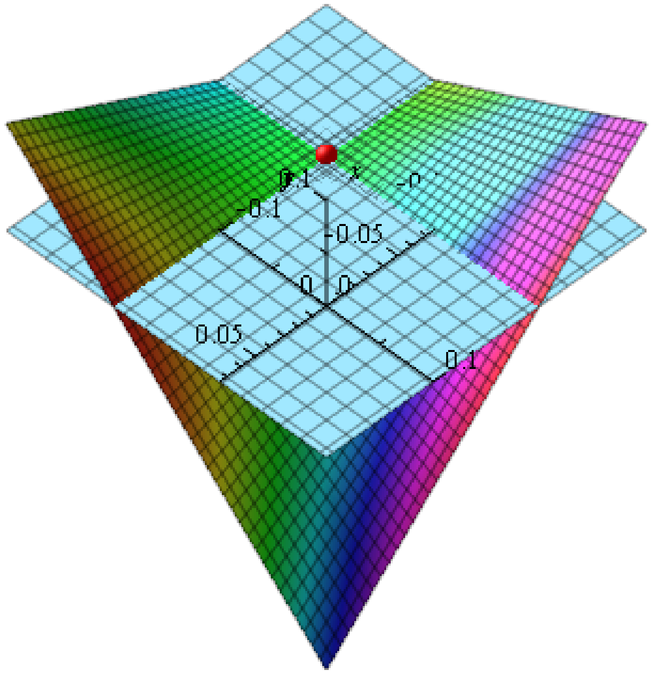
$$\textit{перевал} \tag{6}$$

> $gthree_1 := pointplot3d(\{[XV_1, YV_1, eval(rhs(im_1), [x = XV_1, y = YV_1])]\}, axes = normal, symbol = solidcircle, symbolsize = 25, color = red)$:

> $gthree_2 := plot3d(rhs(im_1), x = -XV_1 ..2\, XV_1, y = -YV_1 ..2\, YV_1, grid = [200, 200], color = rhs(re_1))$:

> $gthree_3 := plot3d\left(eval(rhs(im_1), [x = XV_1, y = YV_1]) + eval\left(\frac{\partial}{\partial x}\, rhs(im_1), [x = XV_1, y = YV_1]\right)\cdot(x - XV_1) + eval\left(\frac{\partial}{\partial y}\, rhs(im_1), [x = XV_1, y = YV_1]\right)\cdot(y - YV_1), x = -XV_1 ..2\, XV_1, y = -YV_1 ..2\, YV_1, grid = [50, 50], color = \text{"SkyBlue"}\right)$:

> $display(gthree_1, gthree_2, gthree_3, caption = \text{'Касательная плоскость в точке перевала } [x = XV_1, y = YV_1]\text{'})$



Касательная плоскость в точке перевала $\left[x = XV_1, y = YV_1\right]$

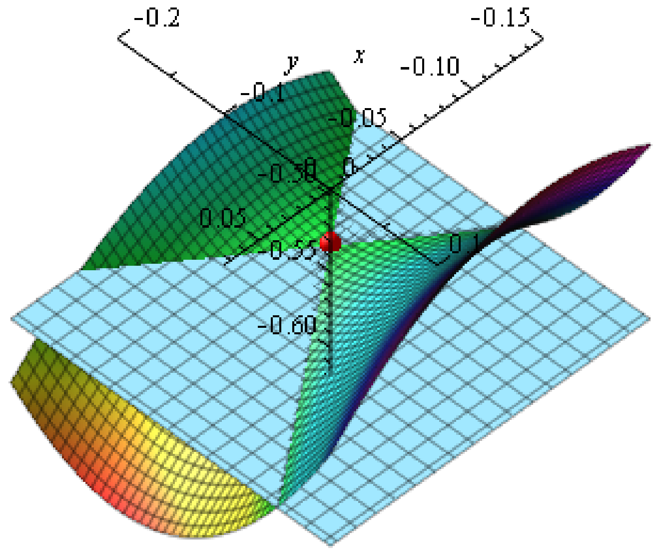
> $gthree_1 := pointplot3d\left(\left\{\left[XU_1, YU_1, eval\left(rhs\left(re_1\right), \left[x = XU_1, y = YU_1\right]\right)\right]\right\}, axes = normal, symbol = solidcircle, symbolsize = 25, color = red\right):$

> $gthree_2 := plot3d\left(rhs\left(re_1\right), x = -XU_1 ..2\, XU_1, y = -YU_1 ..2\, YU_1, grid = [200, 200], color = rhs\left(re_1\right)\right):$

> $\#eval\left(rhs\left(re_1\right), \left[x = X_1, y = Y_1\right]\right) + eval\left(\frac{\partial}{\partial x}\, rhs\left(re_1\right), \left[x = X_1, y = Y_1\right]\right)\cdot\left(x - X_1\right) + eval\left(\frac{\partial}{\partial y}\, rhs\left(re_1\right), \left[x = X_1, y = Y_1\right]\right)\cdot\left(y - Y_1\right)$

> $gthree_3 := plot3d\left(eval\left(rhs\left(re_1\right), \left[x = XU_1, y = YU_1\right]\right) + eval\left(\frac{\partial}{\partial x}\, rhs\left(re_1\right), \left[x = XU_1, y = YU_1\right]\right)\cdot\left(x - XU_1\right) + eval\left(\frac{\partial}{\partial y}\, rhs\left(re_1\right), \left[x = XU_1, y = YU_1\right]\right)\cdot\left(y - YU_1\right), x = -XU_1 ..2\, XU_1, y = -YU_1 ..2\, YU_1, grid = [50, 50], color = \text{"SkyBlue"}\right):$

> $display\left(gthree_1, gthree_2, gthree_3, caption = \text{'}Касательная\ плоскость\ \text{в}\ особой\ точке\ \left[x = XU_1, y = YU_1\right]\text{'}\right)$



Касательная плоскость в особой точке $\left[x = XU_1,\ y = YU_1\right]$