Examples

> $restart; with(Student[VectorCalculus]) : with(PDEtools) : with(Student[LinearAlgebra]) :$
> $with(RandomTools) : with(PDEtools, D\_Dx, declare, ToJet, FromJet) :$

> $R := x^2 + y^2 + z^2$

$$R := x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.1}$$

> $u(r, \theta, \phi), \mathcal{U}(u, \mathrm{v}, \mathrm{w})$

$$u(r, \theta, \phi), \mathcal{U}(u, v, w) \tag{1.2}$$

> $DepVars := [U(u, v, w)]; DVars := [U(x, y, z), u(r, \theta, z), \mathcal{U}(u, v, w)]; DV := [u(r, \theta, \phi), U(x, y, z)]$

$$DepVars := [U(u, v, w)]$$
$$DVars := [U(x, y, z), u(r, \theta, z), \mathcal{U}(u, v, w)]$$
$$DV := [u(r, \theta, \phi), U(x, y, z)] \tag{1.3}$$

Уравнение Лапласа, часто встречается в физике

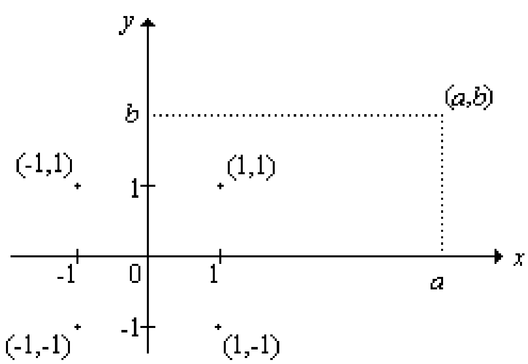
> $G_0 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x, y, z)$

$$G_0 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x, y, z) \tag{1.4}$$

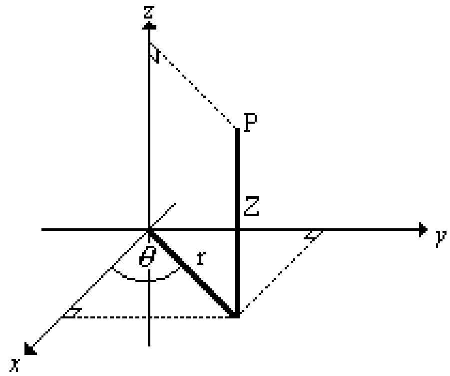
Тема: Якобиан преобразования и замена координат в уравнении Лапласа.

Примеры ортогональных координат

Декартовы координаты или прямоугольные координаты



Цилиндрические координаты



Сферические координаты

$$x = r\sin(\phi)\,\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\phi)\,\sin(\theta)$$

$$z = r\cos(\phi)$$

Примеры решения задач

Переход к цилиндрическим координатам

> $trcyl := \{x = changecoords(x, [x, y, z], \text{cylindrical}, [r, \theta, z]), y = changecoords(y, [x, y, z], \text{cylindrical}, [r, \theta, z]), U(x, y, z) = u(r, \theta, z)\}$

$$trcyl := \{x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), U(x, y, z) = u(r, \theta, z)\} \qquad \textbf{(1.5)}$$

Берем частные производные

> $dxch := \left\{\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) = dchange\left(trcyl, \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z), [r, \theta, u(r, \theta, z)]\right), \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) = dchange\left(trcyl, \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z), [r, \theta, u(r, \theta, z)]\right), \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = dchange\left(trcyl,\right.\right.$

$\frac{\partial}{\partial z}\, U(x, y, z), [r, \theta, u(r, \theta, z)]\Big)\Big)\Big\}$: $ToJet(dxch, DVars)$

$$\left\{U_x = \frac{\cos(\theta)\, u_r\, r - \sin(\theta)\, u_\theta}{r},\ U_y = \frac{\sin(\theta)\, u_r\, r + \cos(\theta)\, u_\theta}{r},\ U_z = u_z\right\} \quad \textbf{(1.6)}$$

> $vars := \left[\frac{\partial}{\partial r}\, u(r, \theta, z), \frac{\partial}{\partial \theta}\, u(r, \theta, z), \frac{\partial}{\partial z}\, u(r, \theta, z)\right]$: $oldvars := \left[\frac{\partial}{\partial x}\, U(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y}\, U(x, y, z), \frac{\partial}{\partial z}\, U(x, y, z)\right]$:

Линейная система уравнений для поиска Якобиана преобразования в матричной форме.

> $A, b := GenerateMatrix\big(map\big(simplify, solve(dxch, vars)_1, 'symbolic'\big), oldvars\big)$: A; $ToJet(b, DVars)$

$$\begin{bmatrix} -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ r\sin(\theta) & -r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -u_r \\ -u_\theta \\ -u_z \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.7)}$$

Находим Якобиан преобразования

> $simplify(Determinant(A), 'symbolic')$

$$-r \quad \textbf{(1.8)}$$

Переписываем все производные в новых цилиндрических координатах

> $ToJet\left(\frac{\partial}{\partial x}\, U(x, y, z) = simplify\left(dchange\left(trcyl, \frac{\partial}{\partial x}\, U(x, y, z), [r, \theta, u(r, \theta, z)]\right), 'size'\right), DVars\right)$

$$U_x = \frac{\cos(\theta)\, u_r\, r - \sin(\theta)\, u_\theta}{r} \quad \textbf{(1.9)}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial}{\partial y}\, U(x, y, z) = simplify\left(dchange\left(trcyl, \frac{\partial}{\partial y}\, U(x, y, z), [r, \theta, u(r, \theta, z)]\right), 'size'\right), DVars\right)$

$$U_y = \frac{\sin(\theta)\, u_r\, r + \cos(\theta)\, u_\theta}{r} \quad \textbf{(1.10)}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial}{\partial z}\, U(x, y, z) = simplify\left(dchange\left(trcyl, \frac{\partial}{\partial z}\, U(x, y, z), [r, \theta, u(r, \theta, z)]\right), 'size'\right), DVars\right)$

$$U_z = u_z \quad \textbf{(1.11)}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(trcyl, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,U(x,y,z), [r,\theta,u(r,\theta,z)]\right),'size'\right), DVars\right)$

$$U_{x,x} = \frac{1}{r^2}\left(u_{r,r}\cos(\theta)^2 r^2 - 2\,u_{r,\theta}\cos(\theta)\sin(\theta)\,r - u_r\cos(\theta)^2 r + 2\,u_\theta\cos(\theta)\sin(\theta) - u_{\theta,\theta}\cos(\theta)^2 + u_r\,r + u_{\theta,\theta}\right) \tag{1.12}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(trcyl, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,U(x,y,z), [r,\theta,u(r,\theta,z)]\right),'size'\right), DVars\right)$

$$U_{y,y} = \frac{1}{r^2}\left(-u_{r,r}\cos(\theta)^2 r^2 + 2\,u_{r,\theta}\cos(\theta)\sin(\theta)\,r + u_r\cos(\theta)^2 r + u_{r,r}\,r^2 - 2\,u_\theta\cos(\theta)\sin(\theta) + u_{\theta,\theta}\cos(\theta)^2\right) \tag{1.13}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(trcyl, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,U(x,y,z), [r,\theta,u(r,\theta,z)]\right),'size'\right), DVars\right)$

$$U_{z,z} = u_{z,z} \tag{1.14}$$

Подставляем их значения в уравнение Лапласа в декартовых координатах и получаем запись уравнения Лапласа в цилиндрических координатах

> $ToJet(expand(simplify(simplify(dchange(trcyl, G_0, [r,\theta,u(r,\theta,z)]),'size'),'size')), DVars) = 0$

$$u_{z,z} + u_{r,r} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta,\theta}}{r^2} = 0 \tag{1.15}$$

Переход к сферическим координатам

> $trsph := \{x = changecoords(x, [x,y,z], spherical, [r,\theta,\phi]), y = changecoords(y, [x,y,z], spherical, [r,\theta,\phi]), z = changecoords(z, [x,y,z], spherical, [r,\theta,\phi]), U(x,y,z) = u(r,\theta,\phi)\}$

$$trsph := \{x = r\sin(\phi)\cos(\theta), y = r\sin(\phi)\sin(\theta), z = r\cos(\phi), U(x,y,z) = u(r,\theta,\phi)\} \tag{1.16}$$

> $dxch := \left\{\frac{\partial}{\partial x}\,U(x,y,z) = dchange\left(trsph, \frac{\partial}{\partial x}\,U(x,y,z), [r,\theta,\phi,u(r,\theta,\phi)]\right), \frac{\partial}{\partial y}\,U(x,y,z) = dchange\left(trsph, \frac{\partial}{\partial y}\,U(x,y,z), [r,\theta,\phi,u(r,\theta,\phi)]\right), \frac{\partial}{\partial z}\,U(x,y,z) = dchange\left(trsph, \frac{\partial}{\partial z}\,U(x,y,z), [r,\theta,\phi,u(r,\theta,\phi)]\right)\right\}:$

> $vars := \left[\frac{\partial}{\partial r}\,u(r,\theta,\phi), \frac{\partial}{\partial \theta}\,u(r,\theta,\phi), \frac{\partial}{\partial \phi}\,u(r,\theta,\phi)\right]: oldvars := \left[\frac{\partial}{\partial x}\,U(x,y,z),\right.$

$$\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z),\ \frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z)\Big]:$$

Линейная система уравнений для поиска Якобиана преобразования.

> $A, b := GenerateMatrix\left(map\left(simplify, solve(dxch, vars)_1, 'symbolic'\right), oldvars\right) : simplify(A, 'symbolic'); ToJet(b, DV)$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) & -\cos(\phi) \\ r\sin(\phi)\sin(\theta) & -r\sin(\phi)\cos(\theta) & 0 \\ -r\cos(\phi)\cos(\theta) & -r\cos(\phi)\sin(\theta) & r\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -u_r \\ -u_\theta \\ -u_\phi \end{bmatrix} \qquad (1.17)$$

Якобиан преобразования

> $simplify(Determinant(A), 'symbolic')$

$$\sin(\phi)\,r^2 \qquad (1.18)$$

Переписываем производные в новых сферических координатах

> $ToJet\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(trsph, \frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z), [r, \theta, \phi, u(r,\theta,\phi)]\right), 'size'\right), DV\right)$

$$U_x = \frac{\left(-r\cos(\phi)^2 + r\right)\cos(\theta)\,u_r + \cos(\theta)\cos(\phi)\,u_\phi\sin(\phi) - \sin(\theta)\,u_\theta}{r\sin(\phi)} \qquad (1.19)$$

> $ToJet\left(\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(trsph, \frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z), [r, \theta, \phi, u(r,\theta,\phi)]\right), 'size'\right), DV\right)$

$$U_y = \frac{\left(-r\cos(\phi)^2 + r\right)\sin(\theta)\,u_r + \sin(\theta)\cos(\phi)\,u_\phi\sin(\phi) + \cos(\theta)\,u_\theta}{r\sin(\phi)} \qquad (1.20)$$

> $ToJet\left(\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(trsph, \frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z), [r, \theta, \phi, u(r,\theta,\phi)]\right), 'size'\right), DV\right)$

$$U_z = \frac{\cos(\phi)\,u_r\,r - \sin(\phi)\,u_\phi}{r} \qquad (1.21)$$

> $simplify\left(ToJet\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(trsph, \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,y,z), [r, \theta, \phi, u(r, \theta, \phi)]\right), 'size'\right), DV\right), 'size'\right)$

$$U_{x,x} = \frac{1}{r^2 \sin(\phi)^2} \left(\left(\left(r^2 u_{r,r} - r u_r - u_{\phi,\phi} \right) \cos(\phi)^4 - 2 \sin(\phi) \left(r u_{r,\phi} - u_\phi \right) \cos(\phi)^3 + \left(-2 r^2 u_{r,r} + 2 r u_r + u_{\phi,\phi} \right) \cos(\phi)^2 + 2 \left(r u_{r,\phi} - \frac{3}{2} u_\phi \right) \sin(\phi) \cos(\phi) + u_{r,r} r^2 - u_r r - u_{\theta,\theta} \right) \cos(\theta)^2 + 2 \sin(\theta) \left(r u_{r,\theta} \cos(\phi)^2 - \sin(\phi) u_{\theta,\phi} \cos(\phi) - r u_{r,\theta} + u_\theta \right) \cos(\theta) - \cos(\phi)^2 r u_r + \cos(\phi) \sin(\phi) u_\phi + u_r r + u_{\theta,\theta} \right) \tag{1.22}$$

> $simplify\left(ToJet\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(trsph, \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x,y,z), [r, \theta, \phi, u(r, \theta, \phi)]\right), 'size'\right), DV\right), 'size'\right)$

$$U_{y,y} = \frac{1}{r^2 \sin(\phi)^2} \left(-(\cos(\theta) - 1)(\cos(\theta) + 1) \left(r^2 u_{r,r} - r u_r - u_{\phi,\phi} \right) \cos(\phi)^4 + 2 \sin(\phi) (\cos(\theta) - 1)(\cos(\theta) + 1) \left(r u_{r,\phi} - u_\phi \right) \cos(\phi)^3 + \left(\left(2 r^2 u_{r,r} - 2 r u_r - u_{\phi,\phi} \right) \cos(\theta)^2 - 2 u_{r,\theta} \cos(\theta) \sin(\theta) r - 2 u_{r,r} r^2 + u_r r + u_{\phi,\phi} \right) \cos(\phi)^2 - 2 \left(\left(r u_{r,\phi} - \frac{3}{2} u_\phi \right) \cos(\theta)^2 - \cos(\theta) \sin(\theta) u_{\theta,\phi} - r u_{r,\phi} + u_\phi \right) \sin(\phi) \cos(\phi) + \left(-r^2 u_{r,r} + r u_r + u_{\theta,\theta} \right) \cos(\theta)^2 + 2 \sin(\theta) \left(r u_{r,\theta} - u_\theta \right) \cos(\theta) + u_{r,r} r^2 \right) \tag{1.23}$$

> $simplify\left(ToJet\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(trsph, \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x,y,z), [r, \theta, \phi, u(r, \theta, \phi)]\right), 'size'\right), DV\right), 'size'\right)$

$$U_{z,z} = \frac{\left(r^2 u_{r,r} - r u_r - u_{\phi,\phi} \right) \cos(\phi)^2 - 2 \sin(\phi) \left(r u_{r,\phi} - u_\phi \right) \cos(\phi) + u_r r + u_{\phi,\phi}}{r^2} \tag{1.24}$$

Подставляем их значения в уравнение Лапласа в декартовых координатах и получаем запись уравнения Лапласа в сферических координатах

> $ToJet\left(simplify\left(expand\left(simplify\left(simplify\left(dchange\left(trsph, G_0, [r, \theta, \phi, u(r, \theta, \phi)]\right), 'size'\right), 'size'\right)\right), 'symbolic'\right), DV\right) = 0$

$$-\frac{1}{r^2 \sin(\phi)^2} \left(\cos(\phi)^2 r^2 u_{r,r} + 2 \cos(\phi)^2 r u_r + \cos(\phi)^2 u_{\phi,\phi} - \cos(\phi) \sin(\phi) u_\phi - u_{r,r} r^2 - 2 u_r r - u_{\phi,\phi} - u_{\theta,\theta} \right) = 0 \tag{1.25}$$

Еще пример: переход к "экзотическим" биполярным цилиндрическим координатам: (Spiegel)

> $tr_0 := \left\{ x = \frac{a \sinh(v)}{\cosh(v) - \cos(u)}, y = \frac{a \sin(u)}{\cosh(v) - \cos(u)}, z = w, U(x,y,z) = \mathcal{U}(u,v,w) \right\}$

(1.26)

$$tr_0 := \left\{x = \frac{a\sinh(v)}{\cosh(v) - \cos(u)},\ y = \frac{a\sin(u)}{\cosh(v) - \cos(u)},\ z = w,\ U(x, y, z) = \mathcal{U}(u, v, w)\right\} \tag{1.26}$$

> $dxch := \left\{\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) = dchange\left(tr_0, \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u, \mathrm{v}, \mathrm{w})]\right), \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) = dchange\left(tr_0, \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u, \mathrm{v}, \mathrm{w})]\right), \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = dchange\left(tr_0, \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u, \mathrm{v}, \mathrm{w})]\right)\right\}:$

> $ToJet(dxch, DVars)$

$$\left\{U_x = -\frac{-\mathcal{U}_v + \mathcal{U}_v\cosh(v)\cos(u)}{a},\ U_y = -\frac{\sinh(v)\sin(u)\,\mathcal{U}_v}{a},\ U_z = \mathcal{U}_w\right\} \tag{1.27}$$

> $vars := \left[\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{U}(u, v, w), \frac{\partial}{\partial v}\mathcal{U}(u, v, w), \frac{\partial}{\partial w}\mathcal{U}(u, v, w)\right]$

$$vars := \left[\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{U}(u, v, w), \frac{\partial}{\partial v}\mathcal{U}(u, v, w), \frac{\partial}{\partial w}\mathcal{U}(u, v, w)\right] \tag{1.28}$$

> $oldvars := \left[\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z), \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z)\right]$

$$oldvars := \left[\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z), \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z)\right] \tag{1.29}$$

> $A, b := GenerateMatrix\left(map\left(simplify, solve(dxch, vars)_1, \text{'symbolic'}\right), oldvars\right)$

$$A, b := \left[\left[\left[\frac{\sinh(v)\sin(u)\,a}{\cosh(v)^2 - 2\cosh(v)\cos(u) + \cos(u)^2}, -\frac{a\,(\cosh(v)\cos(u) - 1)}{\cosh(v)^2 - 2\cosh(v)\cos(u) + \cos(u)^2}, 0\right], \left[\frac{a\,(\cosh(v)\cos(u) - 1)}{\cosh(v)^2 - 2\cosh(v)\cos(u) + \cos(u)^2}, \frac{\sinh(v)\sin(u)\,a}{\cosh(v)^2 - 2\cosh(v)\cos(u) + \cos(u)^2}, 0\right], [0, 0, -1]\right], \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{U}(u, v, w)\right) \\ -\left(\frac{\partial}{\partial v}\mathcal{U}(u, v, w)\right) \\ -\left(\frac{\partial}{\partial w}\mathcal{U}(u, v, w)\right)\end{bmatrix} \tag{1.30}$$

Якобиан преобразования

> $simplify(Determinant(A), \text{'symbolic'})$

$$-\frac{a^2}{\cosh(v)^2 - 2\cosh(v)\cos(u) + \cos(u)^2} \tag{1.31}$$

Переписываем производные в новых координатах

> $ToJet\left(\frac{\partial}{\partial x} U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(tr_0, \frac{\partial}{\partial x} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right), 'size'\right), DVars\right)$

$$U_x = \frac{-\mathcal{U}_v \cosh(v)\cos(u) + \mathcal{U}_v}{a} \tag{1.32}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial}{\partial y} U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(tr_0, \frac{\partial}{\partial y} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right), 'size'\right), DVars\right)$

$$U_y = -\frac{\sinh(v)\sin(u)\,\mathcal{U}_v}{a} \tag{1.33}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial}{\partial z} U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(tr_0, \frac{\partial}{\partial z} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right), 'size'\right), DVars\right)$

$$U_z = \mathcal{U}_w \tag{1.34}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(tr_0, \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right), 'size'\right), DVars\right)$

$$U_{x,x} = \frac{1}{a^2}\left((\cosh(v)\cos(u) - 1)^2\,\mathcal{U}_{v,v} + 2\left(\cosh(v)\cos(u)^2 - \frac{1}{2}\cos(u) - \frac{1}{2}\cosh(v)\right)\sinh(v)\,\mathcal{U}_v\right) \tag{1.35}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(tr_0, \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right), 'size'\right), DVars\right)$

$$U_{y,y} = \frac{1}{a^2}\left(\left((1 - \cos(u)^2)\cosh(v)^2 + \cos(u)^2 - 1\right)\mathcal{U}_{v,v} - 2\left(\cosh(v)\cos(u)^2 - \frac{1}{2}\cos(u) - \frac{1}{2}\cosh(v)\right)\sinh(v)\,\mathcal{U}_v\right) \tag{1.36}$$

> $ToJet\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(tr_0, \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right), 'size'\right), DVars\right)$

$$U_{z,z} = \mathcal{U}_{w,w} \tag{1.37}$$

> $\#\frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x,y,z) = simplify\left(dchange\left(tr_0, \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right), 'size'\right)$

Подставляем их значения в уравнение Лапласа в декартовых координатах и получаем запись уравнения Лапласа в биполярных координатах

> $ToJet(expand(simplify(simplify(dchange(tr_0, G_0, [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathcal{U}(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]), 'size'), 'size')), DVars) = 0$

$$\frac{\cosh(v)^2\, \mathcal{U}_{v,v}}{a^2} - \frac{2\cosh(v)\cos(u)\, \mathcal{U}_{v,v}}{a^2} + \frac{\cos(u)^2\, \mathcal{U}_{v,v}}{a^2} + \mathcal{U}_{w,w} = 0 \qquad \textbf{(1.38)}$$

> $NumTask := 69$

$$NumTask := 69 \qquad \textbf{(1)}$$

Индивидуальные задания с ответами

> $vars := \left[\frac{\partial}{\partial u} U(u,v,w), \frac{\partial}{\partial v} U(u,v,w), \frac{\partial}{\partial w} U(u,v,w)\right]:$

> $j := 1:$

> **for** i **from** 1 **to** $NumTask$ **do**

$M_i := Matrix(3, 3, Generate(rational(denominator = 5), makeproc = true)); \#Determinant(M_i);$

if $Determinant(M_i) \neq 0$ **then**

$tr_j := solve(convert(Matrix(Vector_{'column'}([x, y, z])) - M_i.Matrix(Vector_{'column'}([u, v, w])), 'list'), \{x, y, z\});$

$xch_j := \left\{\frac{\partial}{\partial x} U(x,y,z) = dchange\left(tr_j, \frac{\partial}{\partial x} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, U(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right), \frac{\partial}{\partial y} U(x,y,z) = dchange\left(tr_j, \frac{\partial}{\partial y} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, U(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right), \frac{\partial}{\partial z} U(x,y,z) = dchange\left(tr_j, \frac{\partial}{\partial z} U(x,y,z), [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, U(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]\right)\right\};$

$expand(simplify(simplify(dchange(tr_0, G_0, [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, U(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]), 'size'), 'size'));$

$C_j, f_j := GenerateMatrix(map(simplify, solve(xch_j, vars)_1, 'symbolic'), oldvars);$

$j := j + 1;$

else end if;

end do:

> $\#ToJet(simplify(simplify(dchange(tr_i, G_0, [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, U(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]), 'size'), 'size'), DepVars)$

> $\#print(simplify(simplify(dchange(tr_i, G_0, [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, U(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]), 'size'), 'size'))$

> **for** i **from** 1 **to** $j - 1$ **do**

printf("ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # %\d \n", i);

printf("Новые координаты:"); $print(tr_i)$;

printf("Уравнение Лапласа в декартовых координатах:");

$print(ToJet(simplify(simplify(dchange(tr_i, G_0, [u, \mathrm{v}, \mathrm{w}, U(u,\mathrm{v},\mathrm{w})]), 'size'), 'size'), DepVars));$

printf("Якобиан:"); $print(simplify(Determinant(C_i), 'symbolic'));$

printf("_ _\n");

end do

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 1

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{2}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v - \frac{2}{5}\,w, y = -\frac{4}{5}\,u - \frac{4}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w, z = \frac{4}{5}\,u + \frac{1}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{6775}{162}\,U_{u,u} - \frac{6425}{81}\,U_{u,v} - \frac{4550}{81}\,U_{u,w} + \frac{3125}{81}\,U_{v,v} + \frac{4300}{81}\,U_{v,w} + \frac{1625}{81}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{18}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 2

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{4}{5}\,v - \frac{3}{5}\,w, y = \frac{4}{5}\,u + \frac{4}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w, z = -\frac{3}{5}\,u + \frac{1}{5}\,v + \frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{4525}{392}\,U_{u,u} - \frac{3525}{196}\,U_{u,v} + \frac{2875}{98}\,U_{u,w} + \frac{3125}{392}\,U_{v,v} - \frac{2375}{98}\,U_{v,w} + \frac{1025}{49}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{28}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 3

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{1}{5}\,u - \frac{1}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w, y = \frac{4}{5}\,u - \frac{3}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w, z = \frac{2}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{11325}{784}\,U_{u,u} + \frac{975}{49}\,U_{u,v} - \frac{5125}{392}\,U_{u,w} + \frac{425}{49}\,U_{v,v} - \frac{425}{49}\,U_{v,w} + \frac{2925}{784}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{28}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 4

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{3}{5}\,u + \frac{2}{5}\,v - \frac{4}{5}\,w, y = -\frac{1}{5}\,u - \frac{1}{5}\,v + \frac{1}{5}\,w, z = -\frac{4}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v + \frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{2275}{484}\,U_{u,u} + \frac{5525}{484}\,U_{u,v} + \frac{175}{484}\,U_{u,w} + \frac{16875}{1936}\,U_{v,v} + \frac{425}{968}\,U_{v,w} + \frac{1875}{1936}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{44}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 5

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{1}{5}\,v - \frac{2}{5}\,w, y = -\frac{2}{5}\,u + \frac{1}{5}\,v, z = \frac{2}{5}\,u + \frac{4}{5}\,v - \frac{4}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{25}{4} U_{u,u} + \frac{25}{3} U_{u,v} + \frac{25}{2} U_{u,w} + \frac{50}{3} U_{v,v} + \frac{100}{3} U_{v,w} + \frac{75}{4} U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{12}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 6

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{4}{5} u - \frac{2}{5} v + \frac{3}{5} w, y = -\frac{3}{5} v, z = -\frac{4}{5} u + \frac{4}{5} v + \frac{3}{5} w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{75}{32} U_{u,u} - \frac{25}{18} U_{u,w} + \frac{275}{162} U_{w,w} + \frac{25}{6} U_{u,v} + \frac{25}{9} U_{v,v} - \frac{50}{27} U_{v,w}$$

Якобиан:

$$\frac{72}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 7

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{3}{5} u - \frac{3}{5} v - \frac{1}{5} w, y = -\frac{2}{5} u - \frac{1}{5} v + \frac{1}{5} w, z = \frac{4}{5} u - \frac{1}{5} v - \frac{3}{5} w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{50}{3} U_{u,u} + \frac{25}{2} U_{u,v} + \frac{275}{6} U_{u,w} + \frac{125}{24} U_{v,v} + \frac{175}{12} U_{v,w} + \frac{275}{8} U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{12}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 8

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{3}{5} u - \frac{2}{5} v - \frac{2}{5} w, y = -\frac{1}{5} u - \frac{1}{5} v + \frac{1}{5} w, z = \frac{2}{5} u - \frac{3}{5} w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{1525}{121} U_{u,u} - \frac{5050}{121} U_{u,v} + \frac{1300}{121} U_{u,w} + \frac{4875}{121} U_{v,v} - \frac{2450}{121} U_{v,w} + \frac{525}{121} U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{11}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 9

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{3}{5} v - \frac{2}{5} w, y = \frac{1}{5} u + \frac{4}{5} w, z = -\frac{4}{5} u - \frac{1}{5} v - \frac{2}{5} w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{25}{11} U_{u,u} - \frac{25}{11} U_{u,w} + \frac{75}{22} U_{v,v} - \frac{25}{11} U_{v,w} + \frac{175}{88} U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{44}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 10
Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{1}{5}u+\frac{2}{5}v+\frac{2}{5}w, y=-\frac{4}{5}u+\frac{2}{5}v-\frac{4}{5}w, z=-\frac{3}{5}u-\frac{4}{5}v-\frac{1}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{350}{169}U_{u,u}-\frac{175}{507}U_{u,v}-\frac{1700}{507}U_{u,w}+\frac{6425}{6084}U_{v,v}+\frac{425}{1521}U_{v,w}+\frac{3875}{1521}U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{78}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 11
Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{2}{5}u+\frac{4}{5}v+\frac{3}{5}w, y=\frac{4}{5}u+\frac{1}{5}v+\frac{2}{5}w, z=\frac{3}{5}u-\frac{2}{5}v-\frac{2}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{275}{243}U_{u,u}+\frac{700}{243}U_{u,v}-\frac{1000}{243}U_{u,w}+\frac{3575}{243}U_{v,v}-\frac{7900}{243}U_{v,w}+\frac{4775}{243}U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{27}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 12
Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{3}{5}u-\frac{3}{5}v-\frac{4}{5}w, y=-\frac{2}{5}u-\frac{1}{5}w, z=-\frac{2}{5}u-\frac{4}{5}v+\frac{3}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{8125}{968}U_{u,u}-\frac{5525}{484}U_{u,v}-\frac{625}{121}U_{u,w}+\frac{4725}{968}U_{v,v}+\frac{425}{121}U_{v,w}+\frac{425}{242}U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{44}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 13
Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{2}{5}u+\frac{3}{5}v+\frac{3}{5}w, y=\frac{2}{5}u+\frac{1}{5}w, z=\frac{2}{5}u-\frac{4}{5}v\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{25}{4}U_{u,u}+\frac{100}{13}U_{u,v}-\frac{25}{13}U_{u,w}+\frac{50}{13}U_{v,v}-\frac{50}{13}U_{v,w}+\frac{50}{13}U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{26}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 14
Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{1}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v+\frac{1}{5}\,w,\,y=-\frac{1}{5}\,u+\frac{4}{5}\,w,\,z=\frac{4}{5}\,u+\frac{4}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{425}{16}\,U_{v,\,v}+2\,U_{u,\,u}-\frac{3}{2}\,U_{u,\,w}+\frac{17}{16}\,U_{w,\,w}-\frac{5}{2}\,U_{u,\,v}-\frac{5}{8}\,U_{v,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{4}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 15

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{3}{5}\,w,\,y=-\frac{1}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w,\,z=\frac{2}{5}\,u-\frac{4}{5}\,v-\frac{1}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$75\,U_{u,\,u}+\frac{175}{3}\,U_{u,\,v}+\frac{50}{3}\,U_{u,\,w}+\frac{875}{72}\,U_{v,\,v}+\frac{125}{18}\,U_{v,\,w}+\frac{25}{9}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{12}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 16

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{4}{5}\,u+\frac{4}{5}\,w,\,y=\frac{2}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v+\frac{1}{5}\,w,\,z=-\frac{4}{5}\,u-\frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{625}{16}\,U_{u,\,u}-\frac{275}{16}\,U_{u,\,v}-\frac{175}{2}\,U_{u,\,w}+\frac{225}{64}\,U_{v,\,v}+\frac{75}{4}\,U_{v,\,w}+50\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{16}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 17

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{4}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w,\,y=\frac{4}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,\,z=-\frac{3}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$1550\,U_{u,\,u}-4475\,U_{u,\,v}-1800\,U_{u,\,w}+\frac{12925}{4}\,U_{v,\,v}+2600\,U_{v,\,w}+525\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{2}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 18

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{2}{5}\,u+\frac{3}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,\,y=-\frac{2}{5}\,u-\frac{4}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w,\,z=\frac{1}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v+\frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{2350}{529}\,U_{u,\,u}-\frac{1700}{529}\,U_{u,\,v}-\frac{2150}{529}\,U_{u,\,w}+\frac{4325}{2116}\,U_{v,\,v}+\frac{3525}{1058}\,U_{v,\,w}+\frac{5625}{2116}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{46}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 19

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{1}{5}\,u-\frac{2}{5}\,w,\,y=\frac{3}{5}\,u-\frac{4}{5}\,v+\frac{1}{5}\,w,\,z=\frac{3}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{425}{81}\,U_{u,\,u}+\frac{275}{162}\,U_{u,\,v}-\frac{1100}{81}\,U_{u,\,w}+\frac{625}{648}\,U_{v,\,v}-\frac{475}{162}\,U_{v,\,w}+\frac{950}{81}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{36}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 20

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{3}{5}\,u-\frac{3}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w,\,y=\frac{2}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w,\,z=\frac{2}{5}\,u-\frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{154}{25}\,U_{u,\,u}+\frac{62}{5}\,U_{u,\,v}+\frac{72}{25}\,U_{u,\,w}+9\,U_{v,\,v}+\frac{8}{5}\,U_{v,\,w}+\frac{49}{25}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{1}{5}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 21

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{1}{5}\,v-\frac{1}{5}\,w,\,y=-\frac{4}{5}\,u+\frac{2}{5}\,v,\,z=-\frac{4}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{525}{16}\,U_{u,\,u}+\frac{275}{2}\,U_{u,\,v}+\frac{375}{2}\,U_{u,\,w}+150\,U_{v,\,v}+400\,U_{v,\,w}+275\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{4}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 22

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{3}{5}\,u-\frac{3}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,\,y=\frac{2}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v+\frac{4}{5}\,w,\,z=\frac{1}{5}\,u-\frac{4}{5}\,v-\frac{1}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{625}{324}\,U_{u,\,u}+\frac{100}{81}\,U_{u,\,v}-\frac{175}{162}\,U_{u,\,w}+\frac{250}{81}\,U_{v,\,v}-\frac{550}{81}\,U_{v,\,w}+\frac{1525}{324}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{54}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 23

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{3}{5}\,u+\frac{3}{5}\,v,y=\frac{1}{5}\,u-\frac{4}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,z=\frac{2}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{3550}{1521}\,U_{u,\,u}-\frac{3850}{1521}\,U_{u,\,v}+\frac{400}{169}\,U_{u,\,w}+\frac{4525}{1521}\,U_{v,\,v}-\frac{1050}{169}\,U_{v,\,w}+\frac{875}{169}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{39}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 24

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{1}{5}\,v+\frac{1}{5}\,w,y=-\frac{1}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w,z=\frac{2}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v+\frac{1}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{175}{8}\,U_{u,\,u}-\frac{125}{4}\,U_{u,\,v}-\frac{75}{4}\,U_{u,\,w}+\frac{175}{8}\,U_{v,\,v}+\frac{25}{4}\,U_{v,\,w}+\frac{75}{8}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{4}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 25

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{2}{5}\,u-\frac{3}{5}\,v-\frac{4}{5}\,w,y=\frac{3}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w,z=-\frac{1}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{775}{128}\,U_{u,\,u}-\frac{25}{32}\,U_{u,\,v}+\frac{175}{64}\,U_{u,\,w}+\frac{375}{32}\,U_{v,\,v}-\frac{625}{32}\,U_{v,\,w}+\frac{1175}{128}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{16}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 26

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{3}{5}\,u+\frac{3}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w,y=-\frac{1}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,z=-\frac{3}{5}\,u-\frac{3}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{217}{72}\,U_{u,\,u}-\frac{137}{36}\,U_{u,\,v}-\frac{15}{4}\,U_{u,\,w}+\frac{157}{72}\,U_{v,\,v}+\frac{15}{4}\,U_{v,\,w}+\frac{25}{8}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{12}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 27

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{3}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v+\frac{4}{5}\,w,y=-\frac{4}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,z=\frac{4}{5}\,u-\frac{4}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{425}{81}\,U_{u,\,u}+\frac{3400}{81}\,U_{u,\,v}-\frac{3100}{81}\,U_{u,\,w}+\frac{15625}{162}\,U_{v,\,v}-\frac{14425}{81}\,U_{v,\,w}+\frac{6725}{81}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{18}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 28

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{3}{5}\,u+\frac{2}{5}\,v-\frac{4}{5}\,w,\,y=-\frac{4}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,\,z=-\frac{3}{5}\,u-\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{45}{49}\,U_{u,\,u}+\frac{85}{49}\,U_{u,\,v}+\frac{40}{49}\,U_{u,\,w}+\frac{475}{98}\,U_{v,\,v}+\frac{310}{49}\,U_{v,\,w}+\frac{145}{49}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{14}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 29

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{4}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v-\frac{4}{5}\,w,\,y=\frac{1}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v+\frac{4}{5}\,w,\,z=-\frac{1}{5}\,u+\frac{3}{5}\,v\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{50}{11}\,U_{u,\,u}-\frac{125}{22}\,U_{u,\,w}+\frac{25}{11}\,U_{v,\,v}+\frac{225}{88}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{44}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 30

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{1}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v-\frac{1}{5}\,w,\,y=\frac{3}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v+\frac{4}{5}\,w,\,z=\frac{2}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{825}{49}\,U_{u,\,u}+\frac{950}{49}\,U_{u,\,v}-\frac{300}{7}\,U_{u,\,w}+\frac{1725}{196}\,U_{v,\,v}-\frac{425}{14}\,U_{v,\,w}+\frac{125}{4}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{14}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 31

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{2}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,\,y=-\frac{2}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v-\frac{1}{5}\,w,\,z=\frac{4}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{2875}{72}\,U_{u,\,u}-\frac{350}{3}\,U_{u,\,w}+\frac{175}{2}\,U_{w,\,w}-\frac{400}{9}\,U_{u,\,v}+\frac{125}{9}\,U_{v,\,v}+\frac{200}{3}\,U_{v,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{12}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 32
Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{1}{5}\,u - \frac{4}{5}\,v + \frac{2}{5}\,w, y = -\frac{1}{5}\,v, z = -\frac{3}{5}\,v - \frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{8425}{9}\,U_{u,u} + 300\,U_{u,v} - \frac{2800}{9}\,U_{u,w} + 25\,U_{v,v} - 50\,U_{v,w} + \frac{250}{9}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{3}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 33
Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{2}{5}\,u - \frac{3}{5}\,w, y = -\frac{1}{5}\,u - \frac{4}{5}\,v - \frac{2}{5}\,w, z = \frac{1}{5}\,u + \frac{4}{5}\,v - \frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{43}{4}\,U_{u,u} - \frac{37}{8}\,U_{u,v} + \frac{83}{64}\,U_{v,v} + 6\,U_{u,w} - U_{v,w} + 2\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{8}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 34
Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{4}{5}\,u - \frac{4}{5}\,w, y = \frac{2}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w, z = \frac{2}{5}\,u - \frac{4}{5}\,v + \frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{5025}{2704}\,U_{u,u} + \frac{575}{338}\,U_{u,v} + \frac{725}{676}\,U_{u,w} + \frac{1125}{676}\,U_{v,v} + \frac{125}{169}\,U_{v,w} + \frac{525}{676}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{104}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 35
Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{2}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v - \frac{3}{5}\,w, y = -\frac{2}{5}\,u + \frac{1}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w, z = -\frac{1}{5}\,u - \frac{2}{5}\,v + \frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{125}{8}\,U_{u,u} + \frac{425}{4}\,U_{u,v} + \frac{325}{4}\,U_{u,w} + \frac{1825}{8}\,U_{v,v} + \frac{1425}{4}\,U_{v,w} + \frac{1125}{8}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{4}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 36
Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{4}{5}\,u - \frac{1}{5}\,v - \frac{2}{5}\,w, y = \frac{2}{5}\,u + \frac{4}{5}\,v - \frac{4}{5}\,w, z = \frac{3}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{5825}{3364}\,U_{u,u}-\frac{1350}{841}\,U_{u,v}-\frac{75}{841}\,U_{u,w}+\frac{1125}{841}\,U_{v,v}+\frac{125}{841}\,U_{v,w}+\frac{1175}{1682}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{116}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 37

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{1}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v-\frac{4}{5}\,w,\,y=-\frac{1}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w,\,z=\frac{4}{5}\,u-\frac{4}{5}\,v-\frac{4}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{225}{16}\,U_{v,v}-\frac{75}{4}\,U_{v,w}+\frac{275}{36}\,U_{w,w}+\frac{125}{36}\,U_{u,u}+\frac{25}{4}\,U_{u,v}-\frac{25}{18}\,U_{u,w}$$

Якобиан:

$$\frac{24}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 38

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{1}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v,\,y=-\frac{1}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v+\frac{4}{5}\,w,\,z=\frac{2}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$50\,U_{u,u}+150\,U_{u,v}+100\,U_{u,w}+125\,U_{v,v}+\frac{325}{2}\,U_{v,w}+\frac{875}{16}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{4}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 39

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{4}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,\,y=-\frac{3}{5}\,u+\frac{2}{5}\,v+\frac{4}{5}\,w,\,z=\frac{1}{5}\,u+\frac{2}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{31}{2}\,U_{u,u}+11\,U_{u,v}+24\,U_{u,w}+\frac{39}{8}\,U_{v,v}+\frac{13}{2}\,U_{v,w}+\frac{21}{2}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{4}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 40

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{1}{5}\,u-\frac{3}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w,\,y=-\frac{2}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v+\frac{3}{5}\,w,\,z=-\frac{4}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v-\frac{4}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{3750}{2401}\,U_{u,u}-\frac{550}{2401}\,U_{u,v}-\frac{3350}{2401}\,U_{u,w}+\frac{11625}{2401}\,U_{v,v}+\frac{10650}{2401}\,U_{v,w}+\frac{5150}{2401}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{49}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 41

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{3}{5}u+\frac{4}{5}v-\frac{4}{5}w, y=\frac{4}{5}u-\frac{1}{5}v+\frac{1}{5}w, z=-\frac{3}{5}u+\frac{3}{5}v+\frac{1}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{425}{169}U_{u,u}+\frac{1675}{338}U_{u,v}+\frac{75}{338}U_{u,w}+\frac{11075}{2704}U_{v,v}+\frac{3775}{1352}U_{v,w}+\frac{6475}{2704}U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{52}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 42

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{1}{5}u+\frac{3}{5}v-\frac{4}{5}w, y=\frac{1}{5}v+\frac{2}{5}w, z=-\frac{1}{5}u-\frac{1}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{2750}{81}U_{u,u}+\frac{650}{81}U_{u,v}-\frac{1000}{81}U_{u,w}+\frac{425}{81}U_{v,v}+\frac{250}{81}U_{v,w}+\frac{275}{81}U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{9}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 43

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{4}{5}u+\frac{4}{5}v-\frac{4}{5}w, y=-\frac{3}{5}u+\frac{4}{5}v-\frac{1}{5}w, z=\frac{3}{5}u-\frac{1}{5}v+\frac{1}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{425}{256}U_{u,u}+\frac{2575}{384}U_{u,w}+\frac{28025}{2304}U_{w,w}+\frac{50}{9}U_{v,v}+\frac{275}{18}U_{v,w}+\frac{25}{6}U_{u,v}$$

Якобиан:

$$-\frac{48}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 44

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{1}{5}u-\frac{2}{5}w, y=-\frac{3}{5}u+\frac{1}{5}v+\frac{1}{5}w, z=\frac{1}{5}u+\frac{1}{5}v+\frac{1}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{825}{32}U_{v,v}-\frac{275}{16}U_{v,w}+\frac{225}{32}U_{w,w}+\frac{25}{8}U_{u,u}+\frac{75}{8}U_{u,v}-\frac{25}{8}U_{u,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{8}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 45

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{3}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v - \frac{4}{5}\,w,\, y = \frac{2}{5}\,u - \frac{2}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w,\, z = -\frac{3}{5}\,u - \frac{1}{5}\,v - \frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{7875}{5476}\,U_{u,u} - \frac{4325}{2738}\,U_{u,v} + \frac{175}{1369}\,U_{u,w} + \frac{13675}{5476}\,U_{v,v} + \frac{1425}{1369}\,U_{v,w} + \frac{1525}{1369}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{74}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 46

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{4}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v + \frac{3}{5}\,w,\, y = -\frac{2}{5}\,u + \frac{1}{5}\,v + \frac{3}{5}\,w,\, z = -\frac{1}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$70\,U_{u,u} + 85\,U_{u,v} + 85\,U_{u,w} + \frac{55}{2}\,U_{v,v} + 50\,U_{v,w} + \frac{55}{2}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{2}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 47

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{4}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w,\, y = \frac{2}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w,\, z = -\frac{1}{5}\,u - \frac{2}{5}\,v\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{143}{3}\,U_{u,u} - 16\,U_{u,v} - \frac{112}{3}\,U_{u,w} + \frac{7}{3}\,U_{v,v} + \frac{16}{3}\,U_{v,w} + 9\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{3}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 48

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{2}{5}\,u + \frac{4}{5}\,v + \frac{1}{5}\,w,\, y = -\frac{2}{5}\,u - \frac{1}{5}\,w,\, z = \frac{1}{5}\,u - \frac{4}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{675}{121}\,U_{u,u} + \frac{525}{121}\,U_{u,v} + \frac{50}{121}\,U_{u,w} + \frac{1825}{968}\,U_{v,v} + \frac{375}{242}\,U_{v,w} + \frac{225}{121}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{44}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 49

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{2}{5}\,u + \frac{2}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w,\, y = -\frac{2}{5}\,u - \frac{4}{5}\,v - \frac{4}{5}\,w,\, z = -\frac{2}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v + \frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{209}{36}\,U_{u,u} + 9\,U_{u,v} - \frac{107}{9}\,U_{u,w} + 6\,U_{v,v} - 14\,U_{v,w} + \frac{86}{9}\,U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{6}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 50

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{4}{5}\,u + \frac{2}{5}\,w, y = \frac{1}{5}\,u - \frac{3}{5}\,v, z = -\frac{1}{5}\,v + \frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{3025}{1444}\,U_{u,\,u} + \frac{375}{722}\,U_{u,\,v} - \frac{1775}{722}\,U_{u,\,w} + \frac{3925}{1444}\,U_{v,\,v} + \frac{675}{722}\,U_{v,\,w} + \frac{4025}{1444}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{38}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 51

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{1}{5}\,u + \frac{1}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w, y = \frac{3}{5}\,u - \frac{1}{5}\,v - \frac{4}{5}\,w, z = -\frac{1}{5}\,u - \frac{4}{5}\,v - \frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{6425}{1369}\,U_{u,\,u} - \frac{4950}{1369}\,U_{u,\,v} + \frac{8100}{1369}\,U_{u,\,w} + \frac{3750}{1369}\,U_{v,\,v} - \frac{6050}{1369}\,U_{v,\,w} + \frac{4950}{1369}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{37}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 52

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{4}{5}\,u + \frac{4}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w, y = \frac{3}{5}\,u - \frac{2}{5}\,v - \frac{2}{5}\,w, z = -\frac{4}{5}\,u - \frac{1}{5}\,v + \frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{5}{4}\,U_{u,\,u} - \frac{25}{6}\,U_{u,\,v} + \frac{35}{12}\,U_{u,\,w} + \frac{245}{36}\,U_{v,\,v} - \frac{355}{36}\,U_{v,\,w} + \frac{665}{144}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{12}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 53

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{3}{5}\,u + \frac{2}{5}\,v, y = \frac{3}{5}\,u + \frac{1}{5}\,v + \frac{2}{5}\,w, z = -\frac{1}{5}\,u - \frac{3}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{1125}{841}\,U_{u,\,u} - \frac{250}{841}\,U_{u,\,v} - \frac{350}{841}\,U_{u,\,w} + \frac{2350}{841}\,U_{v,\,v} + \frac{2375}{841}\,U_{v,\,w} + \frac{3325}{1682}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{58}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 54

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{4}{5}\,u+\frac{3}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,\,y=\frac{1}{5}\,v+\frac{1}{5}\,w,\,z=-\frac{4}{5}\,u-\frac{3}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{175}{72}\,U_{u,\,u}-\frac{475}{54}\,U_{u,\,v}-\frac{100}{27}\,U_{u,\,w}+\frac{950}{81}\,U_{v,\,v}+\frac{800}{81}\,U_{v,\,w}+\frac{275}{81}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{36}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 55

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{1}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v-\frac{4}{5}\,w,\,y=-\frac{1}{5}\,u-\frac{1}{5}\,v-\frac{4}{5}\,w,\,z=-\frac{4}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{25}{2}\,U_{u,\,u}+\frac{200}{3}\,U_{u,\,v}-\frac{50}{3}\,U_{u,\,w}+\frac{1825}{18}\,U_{v,\,v}-\frac{875}{18}\,U_{v,\,w}+\frac{475}{72}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{12}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 56

Новые координаты:

$$\left\{x=-\frac{2}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w,\,y=\frac{1}{5}\,u-\frac{3}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w,\,z=\frac{3}{5}\,u+\frac{4}{5}\,v\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{25}{12}\,U_{u,\,u}-\frac{25}{24}\,U_{u,\,v}+\frac{25}{48}\,U_{u,\,w}+\frac{75}{64}\,U_{v,\,v}+\frac{175}{192}\,U_{v,\,w}+\frac{875}{256}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{48}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 57

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{3}{5}\,u-\frac{4}{5}\,v-\frac{4}{5}\,w,\,y=\frac{1}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v-\frac{3}{5}\,w,\,z=\frac{1}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v-\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{10025}{49}\,U_{u,\,u}+\frac{5150}{49}\,U_{u,\,v}+\frac{750}{49}\,U_{v,\,v}+200\,U_{u,\,w}+50\,U_{v,\,w}+50\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{7}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 58

Новые координаты:

$$\left\{x=\frac{2}{5}\,u+\frac{1}{5}\,v+\frac{3}{5}\,w,\,y=-\frac{3}{5}\,u-\frac{1}{5}\,w,\,z=\frac{1}{5}\,u-\frac{2}{5}\,v+\frac{2}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{1725}{361} U_{u,u} - \frac{550}{361} U_{u,v} - \frac{2750}{361} U_{u,w} + \frac{1875}{361} U_{v,v} + \frac{700}{361} U_{v,w} + \frac{1750}{361} U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{19}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 59

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{1}{5}u - \frac{3}{5}v + \frac{3}{5}w, y = \frac{3}{5}u + \frac{1}{5}v - \frac{3}{5}w, z = \frac{2}{5}u - \frac{4}{5}v - \frac{3}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{325}{24} U_{u,u} + \frac{25}{12} U_{u,v} + \frac{325}{18} U_{u,w} + \frac{25}{24} U_{v,v} + \frac{25}{18} U_{v,w} + \frac{125}{18} U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{36}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 60

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{1}{5}v - \frac{1}{5}w, y = -\frac{3}{5}u + \frac{3}{5}w, z = \frac{1}{5}u - \frac{2}{5}v + \frac{3}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{575}{18} U_{u,u} + \frac{1000}{9} U_{u,v} + \frac{550}{9} U_{u,w} + \frac{1925}{18} U_{v,v} + \frac{1025}{9} U_{v,w} + \frac{575}{18} U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{6}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 61

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{4}{5}v + \frac{3}{5}w, y = \frac{2}{5}u - \frac{4}{5}v + \frac{2}{5}w, z = -\frac{3}{5}u - \frac{1}{5}v + \frac{3}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{725}{324} U_{u,u} + \frac{35}{54} U_{u,v} + \frac{80}{81} U_{u,w} + \frac{29}{36} U_{v,v} + \frac{2}{27} U_{v,w} + \frac{101}{81} U_{w,w}$$

Якобиан:

$$\frac{18}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 62

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{2}{5}u - \frac{2}{5}v - \frac{4}{5}w, y = \frac{4}{5}u - \frac{1}{5}v - \frac{2}{5}w, z = -\frac{3}{5}u - \frac{4}{5}v + \frac{4}{5}w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{5}{4} U_{u,u} - \frac{5}{4} U_{u,v} + \frac{5}{8} U_{u,w} + \frac{25}{16} U_{v,v} + \frac{5}{48} U_{v,w} + \frac{155}{192} U_{w,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{24}{25}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 63

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{4}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v + \frac{3}{5}\,w,\ y = -\frac{2}{5}\,u + \frac{1}{5}\,v - \frac{2}{5}\,w,\ z = -\frac{1}{5}\,u\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{5225}{81}\,U_{v,\,v} - \frac{1750}{81}\,U_{v,\,w} + \frac{350}{81}\,U_{w,\,w} + 25\,U_{u,\,u} + \frac{700}{9}\,U_{u,\,v} - \frac{100}{9}\,U_{u,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{9}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 64

Новые координаты:

$$\left\{x = -\frac{3}{5}\,u + \frac{1}{5}\,w,\ y = \frac{1}{5}\,v + \frac{4}{5}\,w,\ z = -\frac{3}{5}\,u - \frac{3}{5}\,v\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{350}{99}\,U_{u,\,u} - \frac{250}{33}\,U_{u,\,v} + \frac{100}{33}\,U_{u,\,w} + \frac{75}{11}\,U_{v,\,v} - \frac{50}{11}\,U_{v,\,w} + \frac{25}{11}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$\frac{33}{125}$$

ОТВЕТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ # 65

Новые координаты:

$$\left\{x = \frac{3}{5}\,u - \frac{2}{5}\,v - \frac{3}{5}\,w,\ y = -\frac{4}{5}\,u + \frac{1}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w,\ z = \frac{3}{5}\,u + \frac{3}{5}\,v - \frac{1}{5}\,w\right\}$$

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\frac{150}{169}\,U_{u,\,u} - \frac{10}{169}\,U_{u,\,v} + \frac{220}{169}\,U_{u,\,w} + \frac{310}{169}\,U_{v,\,v} - \frac{120}{169}\,U_{v,\,w} + \frac{475}{169}\,U_{w,\,w}$$

Якобиан:

$$-\frac{13}{25}$$

>