

# Термомеханический отклик гидравлической опоры

## Введение

При динамических испытаниях гидравлических опор иногда можно столкнуться с возникновением, с одной стороны, нештатных режимов работы, когда корпус установки сильно нагревается, а амплитуда колебаний возрастает, а с другой стороны может наблюдаться, практически при сходных условиях эксперимента, и вполне удовлетворительное функционирование. С физической точки зрения, очевидно, что перегрев гидравлической опоры вызывает понижение вязкости заполняющей ее жидкости, вследствие чего нарастает амплитуда колебаний, а эффективность работы установки снижается. Поэтому в конструкции гидравлических опор предусмотрена такая ситуация, что, к примеру, при падении вязкости жидкости инициируется дополнительное вихревое движение, поперек основного течения, которое препятствует развитию опасных колебаний. Тем не менее, указанный режим функционирования установки требует теоретического объяснения, попыткой чему служит настоящая работа. В качестве математической модели гидравлической опоры выступают уравнения движения пружинного маятника с достаточно большим коэффициентом диссипации энергии. Кроме этого предполагается, что коэффициентом диссипации энергии зависит от температуры окружающей среды. В качестве простейшей температурной зависимости меры диссипации энергии выбрана линейная характеристика малой крутизны, которая стандартным образом входит как в уравнение теплового баланса, так и в уравнения, описывающие механические колебания. Уравнения математической модели исследовались методом малого параметра в предположении, что внешнее гармоническое воздействие на гидравлическую опору умеренно настолько, чтобы не вызвать существенно нелинейных колебаний большой амплитуды, а термическая зависимость диссипативной функции предполагалась невеликой. В результате изучения стационарных режимов колебаний были обнаружены динамические процессы, опасные для функционирования гидравлической опоры, которые объяснимы с точки зрения возникновения термомеханической неустойчивости системы в окрестности резонанса.

Физическая картина динамических процессов в гидравлической опоре весьма прозрачна. Падение вязкости жидкости приводит к росту амплитуды колебаний, что способствует дополнительному тепловыделению. Тепловыделение вызывает понижение вязкости, что способствует его же уменьшению. Ясно, что такой процесс обладает насыщением и рано или поздно, скорее всего, завершится стационарным состоянием. Однако, рассматриваемая система, будучи нелинейной, обладает гистерезисным характером режимов стационарных движений, что приводит к возникновению опасных колебаний даже вдали от резонансных частот. На конкретных примерах осуществлен параметрический анализ системы с целью выявления наиболее опасных режимов установки.

Вопросы термомеханической устойчивости привлекают исследовательский интерес, как в традиционных, так и в новых научных дисциплинах. К примеру, без адекватного описания влияния температурных эффектов на механику совершенно нельзя обойтись в задачах контактной и ультразвуковой металлообработки [1], фазовых переходов в микроструктурах, типа аустенита и мартенсита [2], динамики материалов с памятью [3], автоколебаний механико-электрических систем [4]. Задачи термомеханических колебаний гидравлических опор недостаточно изучены, исследователи обычно ограничиваются только лишь механическими моделями [5,6]. Настоящая работа представляет собой попытку заострить интерес разработчиков гидравлических опор к данной тематике,

особенно с точки зрения использования магнатореологических материалов [7] и методов активного контроля, обеспечивающих весьма эффективное решение задачи по снижению уровня нежелательных колебаний механических конструкций.

## Уравнения движения

Исследуется влияние температурных эффектов на амплитудно-частотную зависимость стационарных колебаний гидравлической опоры. Уравнения движения строятся на основе самых простых общих физических соображений, о которых отмечалось во введении:

$$\dot{x} = y;$$

$$m\dot{y} + 2\delta(1 - \alpha T)y + c(1 + \beta x)x = -(P + \mu p \sin \omega t);$$

$$CV\dot{T} = 2\delta(1 - \alpha T)y^2 - VG(T - T_0).$$

Здесь приведенные коэффициенты гидравлической опоры таковы:  $m$  – масса гидравлической опоры;  $c$  – коэффициент упругости;  $\alpha$  – коэффициент термической вязкости;  $\beta$  – коэффициент упругости, характеризующий асимметрию деформирования;  $V$  – объем гидравлической опоры;  $P$  – статическая нагрузка;  $p$  – максимальное значение внешнего силового воздействия на частоте  $\omega$ ;  $\mu$  – малый безразмерный параметр. Уравнения механических колебаний и термического баланса также характеризуются следующими параметрами:  $C$  – коэффициент теплоемкости;  $G$  – коэффициент теплопроводности;  $x(t)$  – смещение;  $y(t)$  – скорость;  $T(t)$  – температура;  $T_0$  – температура окружающей среды.

Определяется статическая деформация под действием статической нагрузки

$$\Delta = -c + \sqrt{c^2 - 4\beta P} / 2c\beta \quad \text{и собственная частота колебаний в отсутствие диссипации энергии: } \varpi = \sqrt{\sqrt{c^2 - 4\beta P}} / m.$$

Вводятся безразмерные переменные:

$$\tau = \varpi t, \quad X(\tau) = \frac{-2x(t)c\beta - c + \sqrt{c^2 - 4\beta P}}{\mu l c \beta}, \quad Y(\tau) = y(t) / \mu l \varpi, \quad \lambda(\tau) = \frac{T(t) - T_0}{\mu T_0}.$$

Уравнения движения в этих безразмерных переменных переписываются в виде:

$$\dot{X} = Y;$$

$$(1) \quad \dot{Y} + X + \frac{2\delta}{m\varpi}(1 - \alpha T_0)Y + \frac{p}{ml\varpi^2} \sin\left(\frac{\omega t}{\varpi}\right) = -\mu \frac{(c\beta l^2 X^2 - 2\alpha T_0 \delta l \varpi Y \lambda)}{ml\varpi^2};$$

$$\dot{\lambda} + \frac{G}{C\varpi} \lambda = \mu \frac{2\delta l^2 \varpi^2 (1 - \alpha T_0)}{CV\varpi T_0} Y^2.$$

Точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени. Общее решение линейной подсистемы системы (2), когда  $\mu \rightarrow 0$ , имеет вид:

$$\begin{aligned}
X(\tau) &= A \exp\left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0) + im\Omega}{m\bar{\omega}}\right)\tau + \bar{A} \exp\left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0) - im\Omega}{m\bar{\omega}}\right)\tau \\
(2) \quad &+ \frac{P}{l} \frac{\left(2\delta\omega(1-\alpha T_0)\cos\left(\frac{\omega\tau}{\bar{\omega}}\right) + (\omega^2 - \bar{\omega}^2)m\sin\left(\frac{\omega\tau}{\bar{\omega}}\right)\right)}{m^2(\omega^4 + \bar{\omega}^4) + 4\omega^2\left(\delta^2(1-\alpha T_0)^2 - \frac{m^2\bar{\omega}^2}{2}\right)}; \\
Y(\tau) &= \dot{X}(\tau); \quad \lambda(\tau) = B \exp\left(-\frac{G\tau}{C\bar{\omega}}\right).
\end{aligned}$$

Здесь  $A$  – комплексная произвольная константа интегрирования ( $\bar{A}$  – соответствующая комплексно сопряженная величина);  $B$  – действительная произвольная константа интегрирования;  $\Omega = \sqrt{m^2\bar{\omega}^2 - \delta^2(1-\alpha T_0)^2} / m$  – частота, при которой в линейной подсистеме достигается пик амплитуды вынужденных колебаний.

### Эволюционные уравнения

Подстановка в уравнения (1), предназначенная для поиска асимптотического решения первого приближения разложением в ряд по малому параметру  $\mu$ , строится согласно парадигме интегрирования дифференциальных уравнений, методом вариации произвольных постоянных, то есть она такова:

$$\begin{aligned}
X(\tau) &= A(\tau) \exp\left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0) + im\Omega}{m\bar{\omega}}\right)\tau + \bar{A}(\tau) \exp\left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0) - im\Omega}{m\bar{\omega}}\right)\tau \\
&+ u_0(\tau) + \mu u_1(\tau); \\
(3) \quad Y(\tau) &= \left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0) + im\Omega}{m\bar{\omega}}\right)A(\tau) \exp\left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0) + im\Omega}{m\bar{\omega}}\right)\tau \\
&+ \left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0) - im\Omega}{m\bar{\omega}}\right)\bar{A}(\tau) \exp\left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0) - im\Omega}{m\bar{\omega}}\right)\tau + v_0(\tau) + \mu v_1(\tau); \\
\lambda(\tau) &= B(\tau) \exp\left(-\frac{G\tau}{C\bar{\omega}}\right) + w_0(\tau) + \mu w_1(\tau).
\end{aligned}$$

Здесь прежние константы теперь уже варьируются по времени:  $A = A(\tau)$ ,  $\bar{A} = \bar{A}(\tau)$ ,  $B = B(\tau)$ ; а функции  $u_j(\tau)$ ,  $v_j(\tau)$ ,  $w_j(\tau)$  ( $j = 0,1$ ) представляют собою так называемые нерезонансные поправки к основному решению. Порядок поправок определяется индексом  $j$ , который полностью согласован со стандартным разложением искомой функции в ряд по малому параметру  $\mu$ . Нерезонансные поправки вводятся для осуществления асимптотической процедуры построения решения задачи рекурсивным способом, используя метод малого параметра  $\mu$ .

При переходе к полярным координатам  $a(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$ :

$$(4) \quad A(\tau) = a(\tau) \exp i\varphi(\tau) \exp\left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0)\tau}{m\varpi}\right), \quad \bar{A}(\tau) = a(\tau) \exp(-i\varphi(\tau)) \exp\left(\frac{-\delta(1-\alpha T_0)\tau}{m\varpi}\right),$$

в системе (1) вблизи резонанса выявляются «быстрые» и «медленные» движения, при условии, что внешнее возбуждение системы невелико. Быстрая переменная характеризуется частотой внешней гармонической силы  $\omega$ , а в качестве «медленной» переменной выступает новая координата – фаза  $\psi(\tau) = \varphi(\tau) - \left(\frac{\omega - \Omega}{\varpi}\right)\tau$ , где  $\omega - \Omega$  – величина порядка  $\mu$ , представляющая собой условие фазового синхронизма.

### Уравнения первого нелинейного приближения

Среднее значение заданной функции  $f_1(\tau)$  на периоде  $2\pi\varpi/\omega$  определяется выражением

$$(5) \quad \langle f_1 \rangle = \frac{\omega}{2\pi\varpi} \int_0^{\frac{2\pi\varpi}{\omega}} f_1 d\tau.$$

Осреднение осуществляется по «медленным» переменным тогда, когда резонанс уже устранен из системы. Применение оператора среднего значения (5) к уравнениям (1), с учетом подстановок (3) и (4) приводит к следующим эволюционным уравнениям нулевого приближения:

$$\dot{a} + \frac{\delta(1-\alpha T_0)}{m\varpi} a - \frac{p \cos\psi}{4\varpi l \sqrt{m^2\varpi^2 - \delta^2(1-\alpha T_0)^2}} = 0;$$

$$(6) \quad \dot{\psi} + \frac{\omega - \Omega}{\varpi} + \frac{p \sin\psi(\tau)}{4a(\tau)\varpi l \sqrt{m^2\varpi^2 - \delta^2(1-\alpha T_0)^2}} = 0;$$

$$\dot{B} = 0.$$

Стационарное решение системы эволюционных уравнений (6) получается приравниванием всех производных нулю:

$$a_0^2 = \frac{mp^2}{16l^2 \left( m(\varpi^2 + \omega^2) - 2\sqrt{m^2\varpi^2 - \delta^2(1-\alpha T_0)^2} \right) \left( m^2\varpi^2 - \delta^2(1-\alpha T_0)^2 \right)};$$

$$(7) \quad \psi_0 = \arctan \left( - \frac{m\omega \sqrt{m^2\varpi^2 - \delta^2(1-\alpha T_0)^2} - m^2\varpi^2 + \delta^2(1-\alpha T_0)^2}{\delta(1-\alpha T_0)\sqrt{m^2\varpi^2 - \delta^2(1-\alpha T_0)^2}} \right);$$

$$B_0 = 0.$$

Уравнения для определения нерезонансных поправок нулевого порядка таковы:

$$\dot{u}_0(\tau) = v_0(\tau) + \frac{p \cos\left(\frac{\omega \tau}{\varpi}\right)}{l\varpi \sqrt{m^2\varpi^2/2 - \delta^2(1 - \alpha T_0)^2}}; \quad (8)$$

$$\dot{v}_0(\tau) = -\frac{2\delta(1 - \alpha T_0)}{m\varpi}v_0(\tau) - u_0(\tau) + \frac{p\delta(1 - \alpha T_0)\cos\left(\frac{\omega \tau}{\varpi}\right)}{2\varpi^2 ml \sqrt{m^2\varpi^2/2 - \delta^2(1 - \alpha T_0)^2}} - \frac{p\sin\left(\frac{\omega \tau}{\varpi}\right)}{2\varpi^2 ml}.$$

После отыскания частного решения системы (8) нулевое приближение считается полностью построенным. Совершенно очевидно, что стационарное решение нулевого приближения, с точки зрения подстановки (3) полностью совпадает с соответствующим решением исходной линеаризованной системы (1).

Для построения эволюционных уравнений первого нелинейного приближения опять-таки используется та же подстановка (3), но в ней поправки нулевого порядка уже известные функции, представляющие собою частное решение системы линейных неоднородных уравнений (8).

Эволюционные уравнения первого нелинейного приближения таковы:

$$\begin{aligned} \dot{a} - \frac{p \cos\psi}{4m\varpi \Omega l} + \frac{\delta(1 - \alpha T_0)}{m\varpi} a \cos\psi + \mu B(\gamma_{10}a + \gamma_{11} \sin\psi + \gamma_{12} \cos\psi) &= 0; \\ \dot{\psi} + \frac{\omega - \Omega}{\varpi} + \frac{p}{4m\varpi \Omega l} \frac{\sin\psi}{a} + \mu B\left(\gamma_{20} + \gamma_{21} \frac{\sin\psi}{a} + \gamma_{22} \frac{\cos\psi}{a}\right) &= 0; \\ \dot{B} + \frac{G}{C\varpi} B + \mu(\gamma_{30} + a(\gamma_{31} \sin\psi + \gamma_{32} \cos\psi) + \gamma_{33}a^2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \gamma_{10} &= -\frac{\delta \alpha T_0}{m\varpi}; \\ \gamma_{11} &= \frac{\alpha \delta p T_0 (2\omega^2(1 - \alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2(\varpi^2 - \omega^2)(\varpi^2 - \omega \Omega))}{16m^2 \Omega^2 \varpi l (\omega^2(1 - \alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2(\varpi^2 - \omega^2)/4)}; \\ \gamma_{12} &= \frac{\alpha \delta^2 p T_0 m \omega (1 - \alpha T_0)(\varpi^2 + \omega^2 - 2\omega \Omega)}{16m^2 \Omega^2 \varpi l (\omega^2(1 - \alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2(\varpi^2 - \omega^2)/4)}; \\ \gamma_{20} &= -\frac{\alpha \delta^2 T_0 (1 - \alpha T_0)}{m^2 \Omega \varpi}; \\ \gamma_{21} &= \frac{\alpha \delta^2 p T_0 (1 - \alpha T_0)(\varpi^2 + \omega^2 - 2\omega \Omega) \omega}{16m \Omega^2 \varpi l (\omega^2(1 - \alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2(\varpi^2 - \omega^2)/4)}; \end{aligned}$$

$$\gamma_{22} = \frac{\alpha \delta p T_0 (2\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 \bar{\omega}^2 (\bar{\omega}^2 - \omega^2) (\bar{\omega}^2 - \omega \Omega))}{16 \bar{\omega} l (\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 / 4) m^2 \Omega^2},$$

$$\gamma_{30} = - \frac{p^2 \delta T_0 (1-\alpha T_0) \bar{\omega} (2\omega \Omega - (\omega^2 + \bar{\omega}^2))}{16 CVT_0 \Omega^2 (\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 / 4)};$$

$$\gamma_{31} = - \frac{p \delta T_0 (1-\alpha T_0) l (\omega (\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 \bar{\omega}^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2) / 2))}{CVT_0 \bar{\omega} m \Omega (\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 / 4)}$$

$$+ \frac{2\Omega p \delta T_0 (1-\alpha T_0) l (\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 \bar{\omega}^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2) / 4)}{CVT_0 \bar{\omega} m \Omega (\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 / 4)};$$

$$\gamma_{32} = - \frac{p \delta^2 T_0 (1-\alpha T_0)^2 l (-2\omega^2 (\bar{\omega}^2 - 3\omega^2) / 4 + \delta^2 \omega^2 (1-\alpha T_0)^2) - \omega^3 \Omega}{CVT_0 \bar{\omega} \Omega^2 (\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 / 4)}$$

$$\gamma_{33} = \frac{\delta (1-\alpha T_0) \bar{\omega} \left( (\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 - 4\bar{\omega}^2 \omega^2 \right) (1-\alpha T_0)^2 \delta^2 m^2 - \bar{\omega}^2 l^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 m^4}{CVT_0 \bar{\omega} m^2 \Omega (\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 / 4)}$$

$$+ \frac{4\delta^5 \omega^2 \bar{\omega} l^2 (1-\alpha T_0)^5}{CVT_0 \bar{\omega} m^2 \Omega (\omega^2(1-\alpha T_0)^2 \delta^2 + m^2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 / 4)};$$

Структура эволюционных уравнений (9) весьма прозрачна. Ясно, что интенсивность термомеханического эффекта определяется малым параметром  $\mu$ . Если этот параметр ноль, то отсутствует влияние температуры на механические движения. Если допустить, что параметр термической вязкости ноль, то и нули коэффициенты  $\gamma_{10}$ ,  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{20}$ ,  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{22}$  в уравнениях, определяющих амплитуду  $a$  и фазу  $\Psi$ . Опять-таки влияния температуры на механические движения нет. Если изъять эти предельные случаи из рассмотрения, то существенная нелинейность термомеханической связи становится очевидной.

### Фазово-амплитудные частотные характеристики с учетом температурных эффектов

Уравнения для определения стационарных режимов колебаний прямо следуют из эволюционных уравнений (9), если положить все скорости равными нулю. Результатом приравнивания является система трех трансцендентных уравнений относительно того числа же неизвестных, т.е.  $\hat{a}$ ,  $\hat{\Psi}$  и  $\hat{B}$ :

$$\frac{p \cos \widehat{\psi}}{4m\overline{\omega} \Omega l} + \frac{\delta (1 - \alpha T_0)}{m\overline{\omega}} \widehat{a} \cos \widehat{\psi} + \mu \widehat{B} (\gamma_{10} \widehat{a} + \gamma_{11} \sin \widehat{\psi} + \gamma_{12} \cos \widehat{\psi}) = 0;$$

$$(10) \quad \frac{\omega - \Omega}{\overline{\omega}} + \frac{p}{4m\overline{\omega} \Omega l} \frac{\sin \widehat{\psi}}{\widehat{a}} + \mu \widehat{B} \left( \gamma_{20} + \gamma_{21} \frac{\sin \widehat{\psi}}{\widehat{a}} + \gamma_{22} \frac{\cos \widehat{\psi}}{\widehat{a}} \right) = 0;$$

$$\frac{G}{C\overline{\omega}} \widehat{B} + \mu (\gamma_{30} + \widehat{a} (\gamma_{31} \sin \widehat{\psi} + \gamma_{32} \cos \widehat{\psi}) + \gamma_{33} \widehat{a}^2) = 0.$$

Неизвестные величины  $\widehat{a}$ ,  $\widehat{\psi}$  и  $\widehat{B}$ , характеризующие, соответственно амплитуду, фазу колебаний и температуру, можно параметризовать различным образом. Пусть это будут функции частоты внешнего гармонического сигнала  $\omega$ . Тогда доступно построение так называемых амплитудно-фазовых частотных характеристик с учетом температурных эффектов. Для наглядности можно ограничиться рассмотрением частных конкретных значений параметров системы (1). Пусть значения этих параметров таковы:  $V = 39.5 \times 10^{-6} m^3$ ;  $m = 0.5 kg$ ;  $c = 5 \times 10^4 Nm^{-1}$ ;  $\delta = 190 N sm^{-1}$ ;  $P = 10^3 N$ ;  $p = 500 N$ ;  $\alpha = 10^{-3} K^{-1}$ ;  $\beta = 3.14 m^{-1}$ ;  $G = 10^2 WK^{-1} m^{-3}$ ;  $T_0 = 300 K$ ;  $l = 0.034 m$ . Тогда имеется возможность проследить характер изменения амплитудно-фазовых характеристик стационарных процессов в зависимости от малого параметра  $\mu$ . На рис. 1 представлены стационарные характеристики процесса, когда параметр  $\mu = 10^{-2}$ . Амплитудно-фазовые характеристики при таком значении параметра  $\mu$  оказываются практически неразличимы с соответствующими кривыми (7), характеризующими линеаризованную систему. Отличием от линейного случая является нетривиальная температурная кривая, представленная на рис. 2. Частота на всех графиках нормирована величиной  $\overline{\omega} = 294.2 Hz$  так, чтобы максимум квадрата амплитуды приходился на единицу, то есть амплитуда  $\widehat{a}(v)$ , фаза  $\widehat{\psi}(v)$  и температура  $\widehat{B}(v)$  представляются как функции безразмерной частоты  $v = \omega / \overline{\omega}$ .

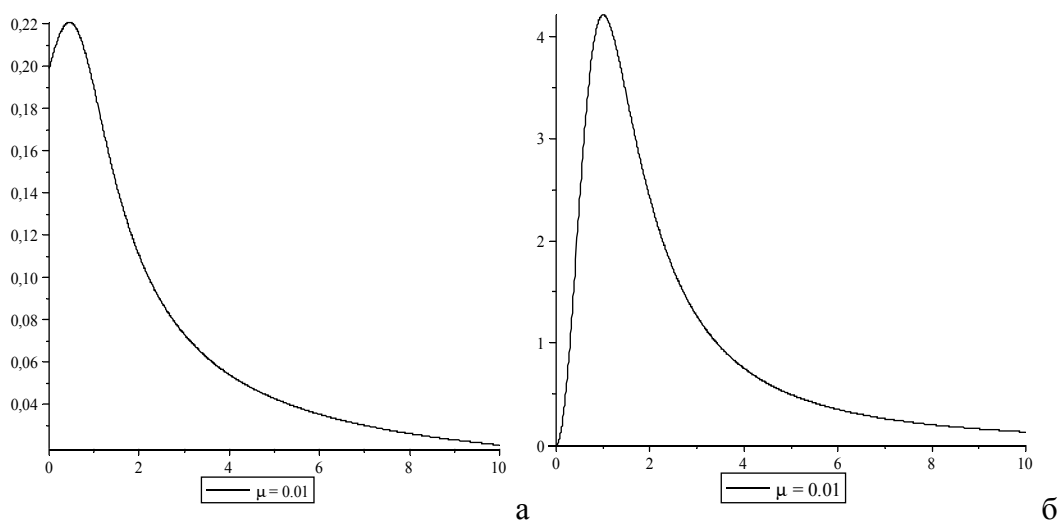


Рис. 1 Амплитуда (а) и температура (б) как функции безразмерной частоты  $v$ .

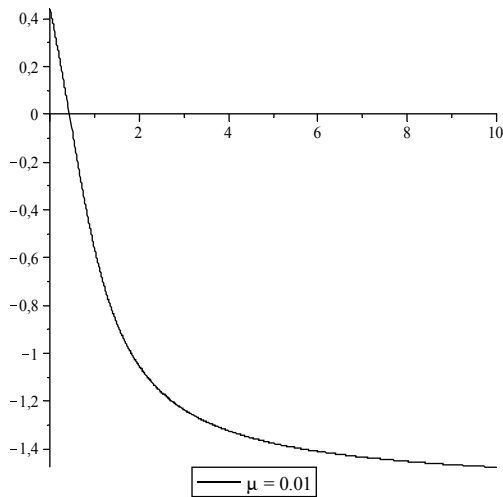


Рис. 2 Фаза как функция безразмерной частоты  $\nu$ .

Пусть малый параметр  $\mu$  нарастает. Сколь значительные при этом изменения амплитудной и температурной характеристик? Графики, приведенные на рис. 3, демонстрируют весьма существенную нелинейную зависимость стационарных решений от сравнительно малых вариаций параметра  $\mu$ .

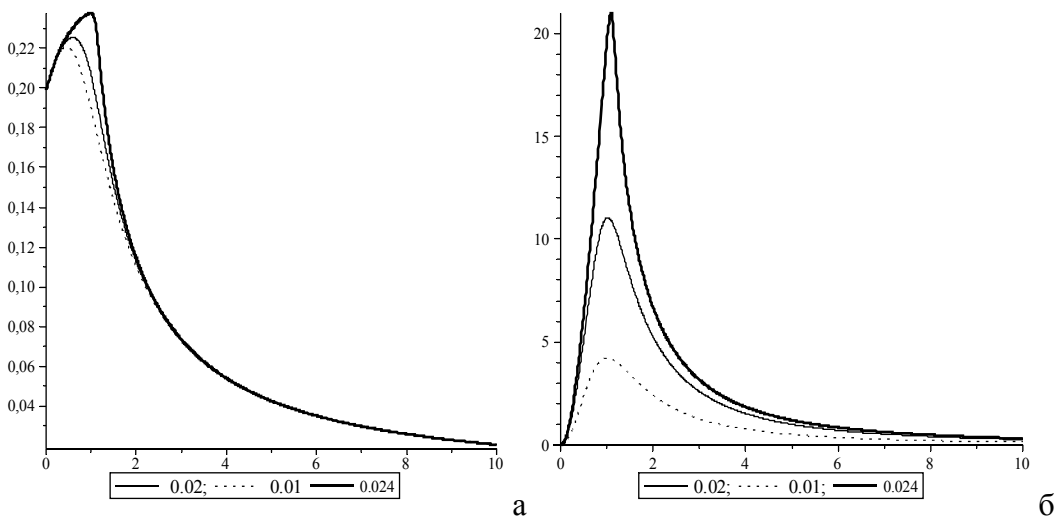


Рис. 3 Амплитудная характеристика (а) и температура (б). Числами отмечены различные значения малого параметра  $\mu$ .

Очевидно, что наиболее чувствительной к изменению малого параметра  $\mu$  оказывается температура гидравлической опоры. Фазовые же характеристики ведут себя весьма консервативно, при любых значениях параметра  $\mu$ , то есть они практически все совпадают с линией, изображенной на рис. 2. Амплитуда меняется несколько медленнее, чем температура, но наблюдается смещение резонансного пика в высокочастотную область, а сама амплитудная кривая становится круче, и как это свойственно нелинейным динамическим системам, с ростом малого параметра  $\mu$  стремится стать неоднозначной. Это влечет термомеханическую неустойчивость системы, которая выражается в резком скачке амплитуды колебаний и существенном повышении температуры гидравлической опоры, как в окрестности резонансной частоты, так и несколько выше последней. На рис. 5 и 6 приводится иллюстрация стационарных состояний вблизи критической точки. Очевидно, что функционирование гидравлической опоры в условиях термомеханической неустойчивости на практике совершенно недопустимо.



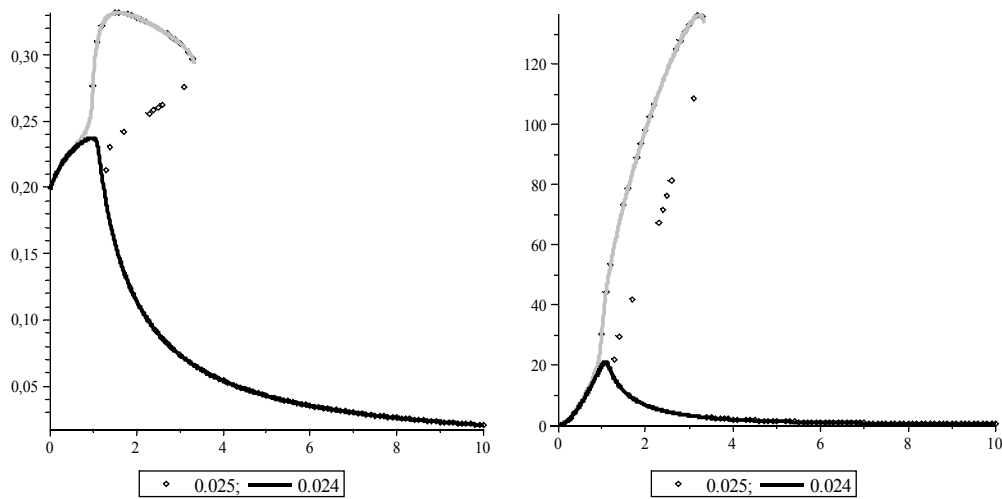


Рис. 4 Термомеханическая неустойчивость. Амплитудная характеристика (а) и температура (б). Числами отмечены различные значения малого параметра  $\mu$ .

Однако не следует забывать, что на рис. 4 представлены результаты исследования модели первого нелинейного приближения (9). Непосредственный численный расчет исходных уравнений движения (1) в характерных точках пространства параметров системы подтверждает возникновение явления термомеханической неустойчивости. Оказывается, что решения уравнений первого нелинейного приближения (9) практически совпадают с решениями исходных уравнений (1) в окрестности резонансной частоты при небольших амплитудах колебаний. Поскольку с ростом амплитуды внешней периодической нагрузки расхождения между решениями точной и приближенной моделей естественно увеличиваются, то становится очевидной актуальность построения эволюционных уравнений второго нелинейного приближения, которые приведут к более точному аналитическому прогнозу, в частности с точки зрения более детального описания частотно-амплитудных зависимостей. Но этот вопрос, будучи нетривиальным, выходит за рамки настоящего исследования.

### Параметрический анализ стационарных решений

Для осуществления параметрического анализа стационарных решений системы эволюционных уравнений первого нелинейного приближения, левые части уравнений (10) обозначаются следующим образом:

$$P(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B}) = \frac{p \cos \hat{\psi}}{4m\bar{\omega} \Omega l} + \frac{\delta(1 - \alpha T_0)}{m\bar{\omega}} \hat{a} \cos \hat{\psi} + \mu \hat{B} (\gamma_{10} \hat{a} + \gamma_{11} \sin \hat{\psi} + \gamma_{12} \cos \hat{\psi});$$

$$(11) \quad Q(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B}) = \frac{\omega - \Omega}{\bar{\omega}} + \frac{p}{4m\bar{\omega} \Omega l} \frac{\sin \hat{\psi}}{\hat{a}} + \mu \hat{B} \left( \gamma_{20} + \gamma_{21} \frac{\sin \hat{\psi}}{\hat{a}} + \gamma_{22} \frac{\cos \hat{\psi}}{\hat{a}} \right);$$

$$R(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B}) = \frac{G}{C\bar{\omega}} \hat{B} + \mu (\gamma_{30} + \hat{a}(\gamma_{31} \sin \hat{\psi} + \gamma_{32} \cos \hat{\psi}) + \gamma_{33} \hat{a}^2).$$

Неизвестные величины  $\hat{a}$ ,  $\hat{\psi}$  и  $\hat{B}$ , характеризующие, как и прежде, соответственно амплитуду, фазу колебаний и температуру, теперь формально считаются гладкими функциями малого параметра  $\mu$ . Поскольку функции  $P(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B})$ ,  $Q(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B})$  и  $R(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B})$  почти во всем пространстве параметров системы являются дифференцируемыми, то доступен наглядный параметрический анализ стационарных решений с помощью рядов

Ли [8,9]. Для этого функции  $P(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B})$ ,  $Q(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B})$  и  $R(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B})$  в уравнениях (10) единожды дифференцируются по переменной  $\mu$ , затем полученные уравнения разрешаются относительно первых производных. В результате формируется система обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$(12) \quad \frac{d\hat{a}}{d\mu} = \zeta_{\hat{a}}(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B}); \quad \frac{d\hat{\psi}}{d\mu} = \zeta_{\hat{\psi}}(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B}); \quad \frac{d\hat{B}}{d\mu} = \zeta_{\hat{B}}(\hat{a}, \hat{\psi}, \hat{B}).$$

Очевидно, что выражения (11) представляют собой неявные решения системы (12) при вполне определенных начальных данных, определяемых тройкой параметров  $\hat{a}(0)$ ,  $\hat{\psi}(0)$  и  $\hat{B}(0)$ . Эти параметры полностью определяются правыми частями выражения (7), то есть  $\hat{a}(0) = a_0$ ,  $\hat{\psi}(0) = \psi_0$  и  $\hat{B}(0) = B_0$ .

### Зависимость стационарных решений от малого параметра $\mu$

В качестве примера на рис. 5 представлен результат численного интегрирования системы (12). Значения расчетных параметров прежние:  $V = 39.5 \times 10^{-6} m^3$ ;  $m = 0.5 kg$ ;  $c = 5 \times 10^4 Nm^{-1}$ ;  $\delta = 190 N sm^{-1}$ ;  $P = 10^3 N$ ;  $p = 500 N$ ;  $\alpha = 10^{-3} K^{-1}$ ;  $\beta = 3.14 m^{-1}$ ;  $G = 10^2 WK^{-1} m^{-3}$ ;  $T_0 = 300 K$ ;  $l = 0.034 m$ .

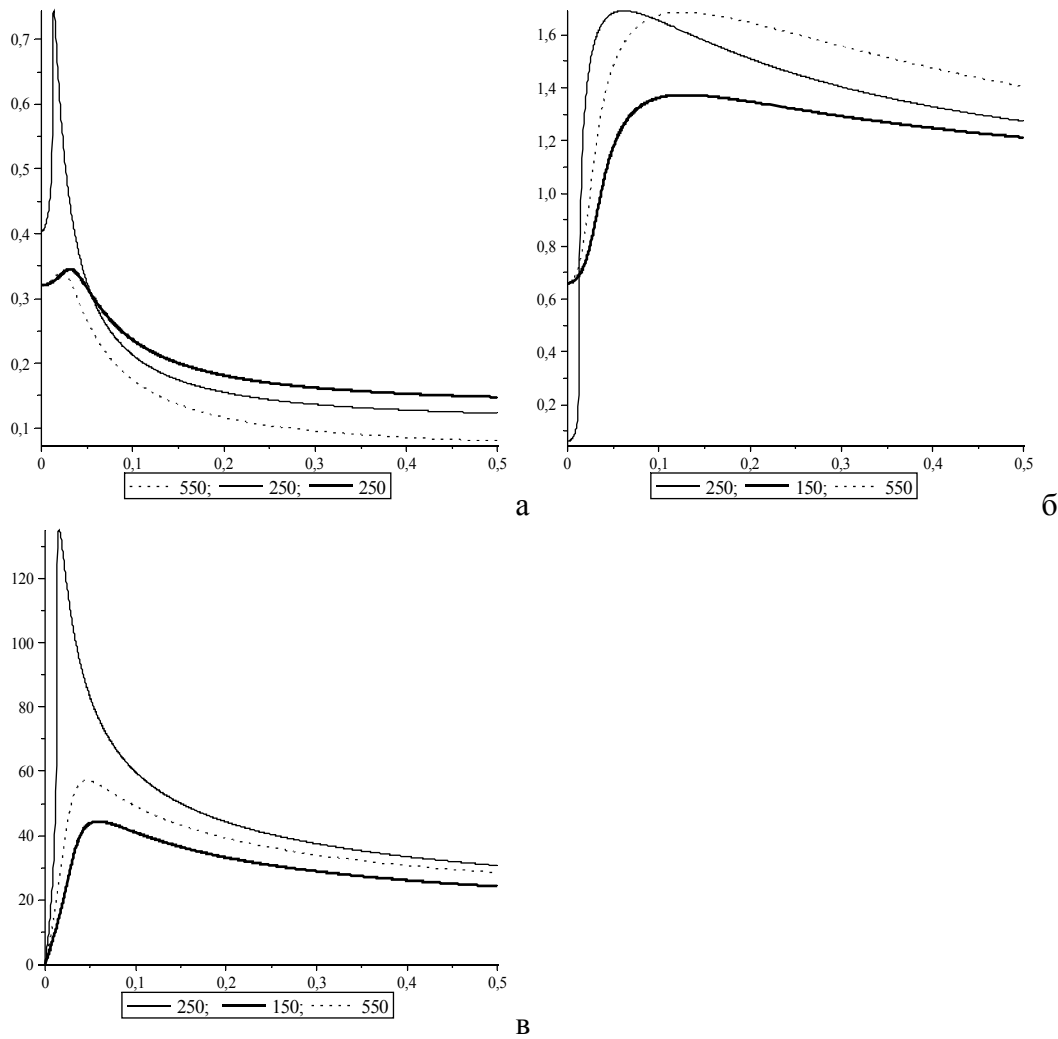


Рис. 5 Стационарные решения. Амплитудная характеристика (а), фаза (б) и температура (в) как функции малого параметра  $\mu$ . Числами отмечены расчетные значения частоты внешнего сигнала  $\omega$  в герцах.

Даже вдали от резонансной частоты  $\Omega$ , как видно на рис. 5, формируется пик максимальных смещений и температур. При приближении частоты внешнего сигнала  $\omega$  к резонансной частоте  $\Omega$  наблюдается типичное явление поведение системы.

Явные решения уравнений (12) представимы рядами Ли:

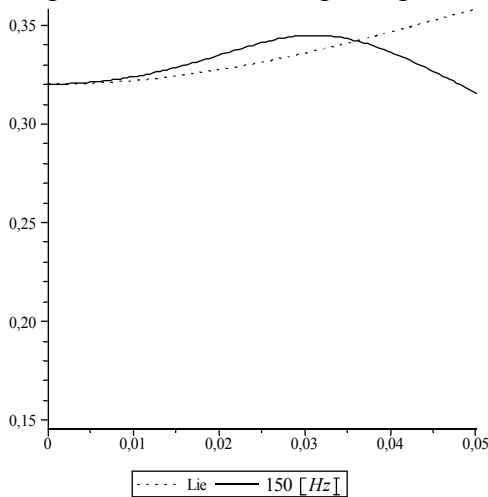
$$\widehat{a}(\mu) = a_0 + \mu G a_0 + \frac{\mu^2}{2} G^2 a_0 + \dots;$$

$$(13) \quad \widehat{\psi}(\mu) = \psi_0 + \mu G \psi_0 + \frac{\mu^2}{2} G^2 \psi_0 + \dots;$$

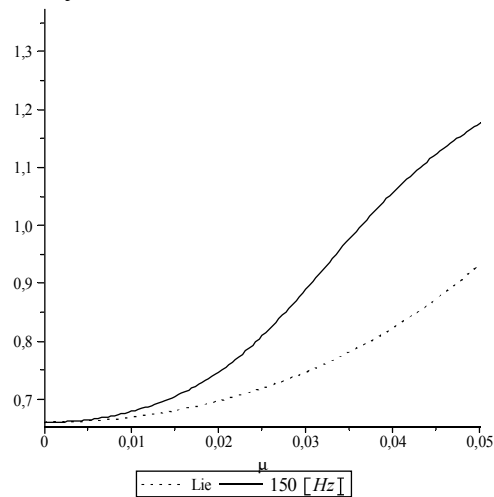
$$\widehat{B}(\mu) = B_0 + \mu G B_0 + \frac{\mu^2}{2} G^2 B_0 + \dots,$$

где  $G = \zeta_{a_0}(a_0, \psi_0, B_0) \frac{\partial}{\partial a_0} + \zeta_{\psi_0}(a_0, \psi_0, B_0) \frac{\partial}{\partial \psi_0} + \zeta_{B_0}(a_0, \psi_0, B_0) \frac{\partial}{\partial B_0}$  – дифференциальный оператор.

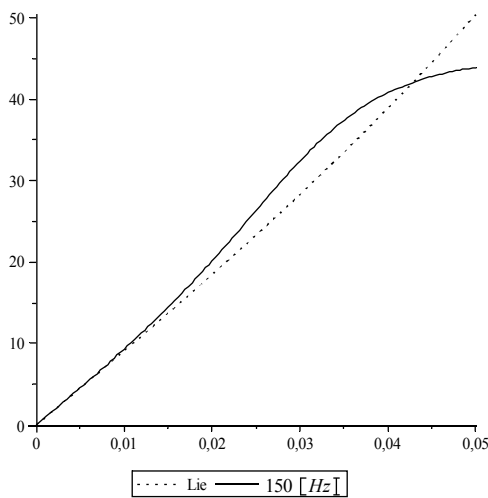
В качестве примера рассматриваются конечные суммы рядов Ли, построенные для конкретных значений параметров системы, указанных выше.



а



б



в

Рис. 6 Аппроксимация рядами Ли стационарного решения. Амплитудная характеристика (а), фаза (б) и температура (в) как функции малого параметра  $\mu$ . Частота внешнего сигнала  $\omega = 150\text{Hz}$ .

На рис. 6 приводятся сравнительные результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (12) и приближенного аналитического решения задачи рядами Ли с точностью до членов пятого порядка малости:

$$\widehat{a}(\mu) = 0.320 + 18.708\mu^2 - 1380.047\mu^4;$$

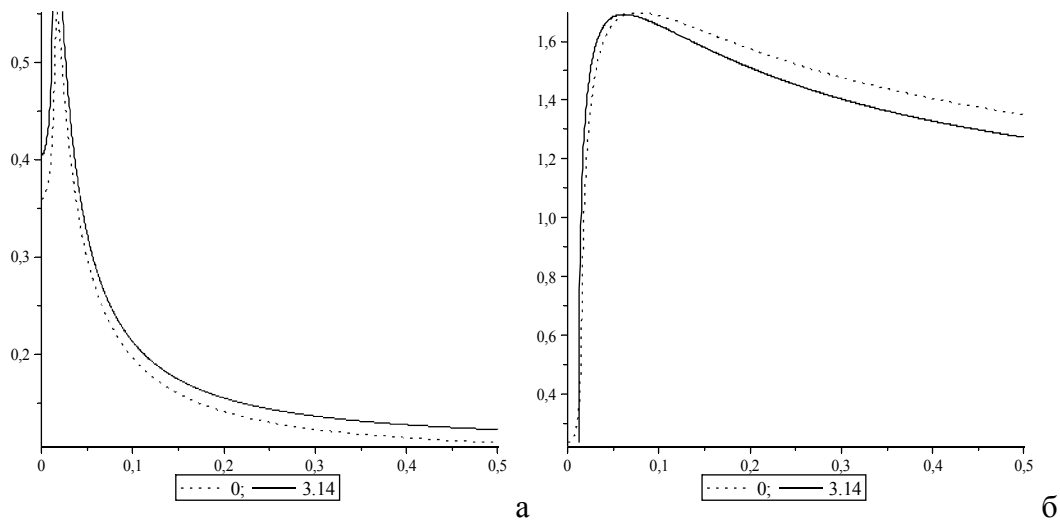
$$\widehat{\psi}(\mu) = 0.660 + 89.093\mu^2 + 8076.283\mu^4;$$

$$\widehat{B}(\mu) = 906.586\mu + 42467.505\mu^3 - 632989.671\mu^5.$$

Очевидно, что представленные конечные суммы представляют собою части условно сходящихся рядов, но в окрестности нуля они дают правильную нетривиальную информацию о поведении точного решения.

### Зависимость стационарных решений от параметра нелинейной упругости $\beta$

При изменении параметра  $\beta$ , характеризующего асимметричность упругой характеристики, как показывает рис. 7, существенного влияния на динамику гидравлической опоры нет.



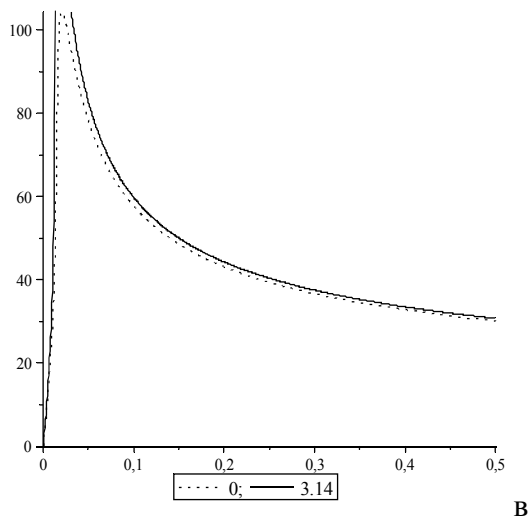


Рис. 7 Стационарные решения. Амплитудная характеристика (а), фаза (б) и температура (в) как функции малого параметра  $\mu$ . Числами отмечены расчетные значения параметра нелинейной упругости  $\beta$  (в единице измерения  $m^{-1}$ ).

Этот факт в целом подтверждается экспериментальными испытаниями гидравлических опор.

### **Зависимость стационарных решений от статической нагрузки $P$**

Изменение параметра  $P$ , характеризующего статическую нагрузку, иллюстрирует рис. 8.

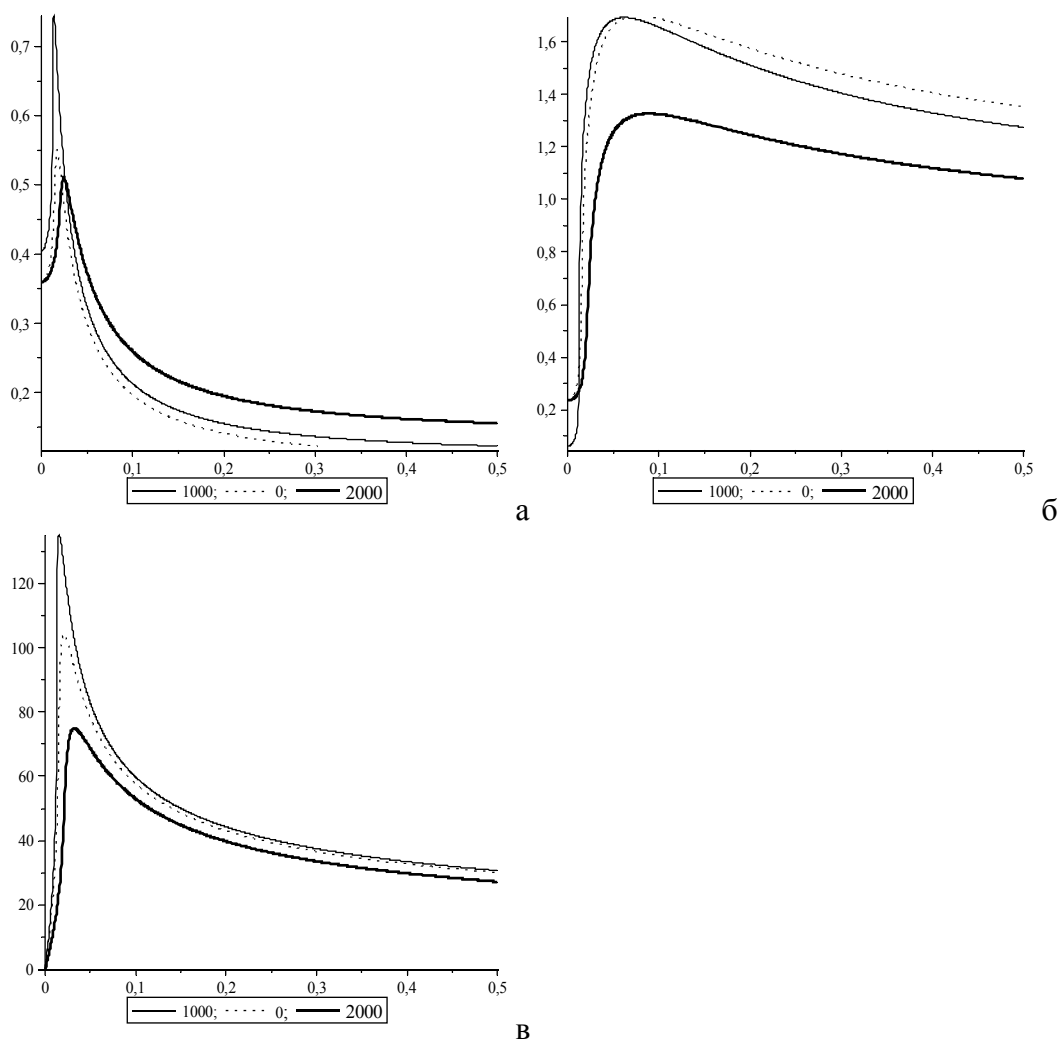


Рис. 8 Стационарные решения. Амплитудная характеристика (а), фаза (б) и температура (в) как функции малого параметра  $\mu$ . Числами отмечены расчетные значения статической нагрузки  $P$  в ньютонах.

Очевидно существенное влияния этого параметра на динамику гидравлической опоры.

## Выводы

В настоящей работе построена математическая модель термомеханической неустойчивости гидравлической опоры. Неустойчивость обусловлена явлением резонанса. Под действием внешнего гармонического сигнала повышается температура жидкости внутри гидравлической опоры и ее вязкость снижается, а амплитуда механических колебаний естественным образом возрастает. Однако, снижение вязкости жидкости ограничивает тепловыделение, что приводит к нелинейным стационарным колебаниям. В окрестности резонансной частоты в системе возникает сильная амплитудно-частотная зависимость, приводящая к гистерезисному характеру колебаний при сканировании частоты. Параметрический анализ системы выявил, что наиболее чувствительным с точки зрения термомеханической неустойчивости является параметр термической вязкости. Этот параметр обладает критическим значением малой величины. Это означает, что использование жидкости с весьма низким параметр термической вязкости неэффективно для гидравлической опоры. Любые посторонние включения, образующиеся в результате эксплуатации установки, вроде частиц металла или полимера, могут легко повысить значение параметра термической вязкости до критического значения неконтролируемым способом.

Предложенная в работе модель является чрезвычайно простой, хоть и не столь тривиальной в точки зрения использованных алгоритмов [10]. Совершенно очевидно, что строгий расчет установки требует более глубокого исследования задачи численными методами [11], в частности, для моделирования более адекватной зависимости между вязкостью и температурой [12], а так же изучения влияния нелинейности [13].

## **Литература**

1. Astashev VK, Babitsky VI, Kolovsky MZ (2000) Dynamics and Control of Machines. Series: Foundations of Engineering Mechanics. Translated by Birkett N. Springer-Verlag, X, 233
2. Wang LX, Melnik Roderick VN (2007) Numerical model for vibration damping resulting from the first-order phase transformations. Applied Mathematical Modelling. Vol: 31 2008–2018
3. Lacarbonara W, Bernardini D, Vestroni F (2004) Nonlinear thermomechanical oscillations of shape-memory devices. Int. Journal of Solids and Structures. Vol:41 1209–1234
4. Tiseo B, Concilio A, Ameduri S, Gianvito A (2010) A shape memory alloys based tunable dynamic vibration absorber for vibration tonal control. Journal of Theoretical and Applied Mechanics. Vol:48(1) 135–153, Warsaw
5. Landa PS, Duboshinskii Ya B (1989) Self-oscillatory systems with high-frequency energy sources. Sov. Phys. Usp. Vol:32 723–731
6. Tondl Aleš (2008) To the problem of self-excited vibration suppression. Eng.Mech., Vol: 5(4) 297–307
7. Kandaurova GS (2002) New phenomena in the low-frequency dynamics of magnetic domain ensembles Phys. Usp. Vol:45 1051–1072
8. Zhuravlev VF, Klimov DM (1988) Applied methods in oscillation theory. Nauka, Moscow
9. Bruno AD (1979) Local methods in nonlinear differential equations. Nauka, Moscow (Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1979. – 252 с.)
10. Liu HP, Wu TX (2012) Modelling and Performance Analysis of Rail Vibration Absorber by FE and BE Methods. Noise and vibration mitigation for rail transportation systems. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Vol:118/2012 135–142
11. Fogelson RL, Likhachev, EP (2001) Temperature dependence of viscosity. Technical Physics, Vol:71(8) 128–131 (Фогельсон РЛ, Лихачев ЕР (2001) Температурная зависимость вязкости. ЖТФ, том 71, выпуск 8, 128-131)
12. Samani FS, Pellicano F. (2012) Vibration reduction of beams under successive traveling loads by means of linear and nonlinear dynamic absorbers. Journal of Sound and Vibration. Vol:331(10) 2272–2290.