# 37. МАТЕМАТИКА КАК ЯЗЫК, КАК ОПЕРАЦИОННАЯ СИСТЕМА И МОДЕЛИ

В этой главе речь пойдет о том, что такое математика, как она устроена, и почему так огромна и решающа ее роль в точном естествознании и точной науке. Но все это уже после того, как вы познакомились со многими математическими моделями и увидели, как с их помощью познается окружающий мир, подчас на основе очень простых моделей и простых методов их исследования.

Так что такое математика, точнее, что такое математика функционально, в чем ее роль и значение? Ответ на этот вопрос уже был дан во введении: математика – это язык, по своему назначению и роли, т.е. функционально, во многом такой же, как обычные языки: русский, английский, немецкий, французский и другие. Еще Галилей сказал: «Великая книга природы написана математическими символами». Из этого следует, что только тот, кто знает и владеет этим символическим языком, может надеяться читать книгу природы и понимать окружающий его мир: природу, технику и общество. Позднее эта же мысль весьма лаконично была выражена великим физиком В. Гиббсом в его реплике: «Математика тоже язык», и поэтому ее роль столь же велика в изучении окружающего мира, как и обычных языков, в обыденной жизни. С этим нельзя не согласиться, в общем, это так, но все же язык математики чем-то особенный, и вот об этой его особенности и пойдет речь ниже.

Обычный язык – это словарь и звуковые, и графические способы кодирования слов, грамматика, всевозможные фразы и их наборы в виде описаний, сообщений, приказаний, рассказов, инструкций, повестей, романов, ... Нечто похожее есть и в математическом языке. Аналоги слов и грамматики, определяющей правила их сочетания, можно видеть в числах, векторах, матрицах, функциях и действиях с ними: сложении, вычитании, умножении, делении, дифференцировании, интегрировании, ..., а аналог словесных описаний – в математических моделях. Аналогия словесных описаний с математическими моделями достаточно прямая и очевидная, а вот действий и правил, и сочетания слов – не столь ясная. Здесь проявляется специфика математического языка, поскольку его «грамматика» – это не только правила сочетания элементов – слов, но и правила преобразования одних слов в другие.

Первую часть математики – элементы и действия с ними – естественно назвать операционной системой, вторую часть – математическими моделями.

Понять назначение и общие принципы построения операционной системы можно, проследив историю ее становления и развития. Подчеркнем итоговую логику этого становления, а не фактическую конкретную историю, которая подчас весьма путана и непоследовательна.

Началась операционная система с целых положительных чисел. Как они возникли, теряется в далеком прошлом. Но римские и арабские целые числа уже хорошо известны. Практические потребности уже тех давних времен привели к изобретению действий с целыми числами: сложению, вычитанию, умножению и делению. Они возникли как замена длительных и трудновыполнимых пересчетов количеств материалов, товаров, денег, поступающих из разных мест в разное время и в разные места. Эти операции с числами были не всегда выполнимы, и, чтобы это устранить, придумали отрицательные и дробные числа, которым присвоили определенный смысл. Так, если положительное число – это наличность, то отрицательное – это долг. С иррациональными числами произошла длительная заминка: греки не присваивали числа длине гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с единичными катетами, она не измерялась числом, что греками своеобразно обосновывалось отсутствием у катета и гипотенузы общей меры, т.е. отрезка, который бы укладывался в каждом из них целое число раз. Это, непреодолимое для греческой мысли препятствие, в дальнейшем длительно игнорировалось, и лишь в прошлом веке было преодолено Г. Кантором, К. Вейерштассом и Р. Дедекиндом. По существу, это было пополнение рациональных чисел действительными в результате операции предельного перехода, как требование ее замкнутости.

Возникновение комплексных чисел имело ту же причину: устранение неразрешимости квадратных уравнений, в связи с необходимостью извлекать квадратный корень из отрицательного числа.

Гамильтон нашел обобщение комплексных чисел и изобрел кватернионы. Для кватернионов сохранялись все правила действия с действительными и комплексными числами, кроме свойства коммутативности. Затем было доказано, что это единственное обобщение такого рода, хотя подобных кватернионам гиперкомлексных чисел в дальнейшем было придумано много.

Кватернион – это гиперкомплексное число вида

$$a + \alpha i + \beta j + \gamma k, \tag{37.1}$$

где $a$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – обычные действительные числа; $i$, $j$, $k$ – единичные числа новой природы, некие символы или единичные элементы, для которых имеет место следующая таблица умножения:

| | 1 | *i* | *j* | *k* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | *i* | *j* | *k* |
| *i* | *i* | –1 | *k* | –*j* |
| *i* | *j* | –*k* | –1 | *i* |
| *k* | *k* | *j* | –*i* | –1 |

Операции сложения, вычитания и умножения на действительное число для кватернионов такие же, как для комплексных чисел, а умножение кватернионов определяется приведенной таблицей. Из нее видно, что кватернионы, для которых $\beta = \gamma = 0$, или $\alpha = \beta = 0$, или $\alpha = \gamma = 0$ – это обычные комплексные числа. Умножение кватернионов не коммутативно. Деление кватернионов возможно в силу того, что произведение кватерниона (37.1) и кватерниона $a - \alpha \cdot i - \beta \cdot j - \gamma \cdot k$ – действительное число, так что операция деления числа (37.1) на число $a_1 + \alpha_1 i + \beta_1 j + \gamma_1 k$ после умножения числителя и знаменателя на сопряженный кватернион $a_1 - \alpha_1 \cdot i - \beta_1 \cdot j - \gamma_1 \cdot k$ сводится к делению его на действительное число, что сводится к делению на него чисел $a, \alpha, \beta$ и $\gamma$.

Кватернионы были использованы Дж.К. Максвеллом для записи придуманных им уравнений электромагнитного поля. Привычную для нас векторную форму написания уравнений Максвелла получили лишь после того, как кватернионное исчисление породило понятие вектора и векторного исчисления. Произошло это примерно так. Подобно тому, как в комплексном числе выделяется действительная и мнимая части, у кватерниона $a+\alpha\cdot i+\beta\cdot j+\gamma\cdot k$ выделили действительную часть $a$ и векторную часть $\alpha\cdot i+\beta\cdot j+\gamma\cdot k$ и, далее, у произведения двух векторов

$$(\alpha i + \beta j + \gamma k)\,(\alpha_1 i + \beta_1 j + \gamma_1 k) = -\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

действительную часть со знаком минус, назвали их скалярным произведением, а векторную – векторным произведением. Это и привело к возникновению векторного исчисления с действиями сложения, вычитания, скалярного и векторного произведений и, конечно, еще умножения и деления на действительное число. Понятие вектора породило линейную алгебру, линейные преобразования векторов, матрицы и матричное исчисление.

Напомним, что кватернионы – не единственные придуманные гиперкомплексные числа, но они единственные в своем роде, где по сравнению с действительными и комплексными числами нарушена только коммутативность произведения, ассоциативность и дистрибутивность сохранены.

Потребность описания процессов изменения привела к изобретению функций и действий с ними, включая дифференцирование, интегрирование и операторные преобразования, т.е. к возникновению математического и функционального анализов сначала функций только действительного переменного, затем многих переменных и комплексного переменного. Операторы и преобразования стали восприниматься, в свою очередь, как элементы, с которыми также возможны разные действия.

На этом процесс расширения математической операционной системы не остановился, он продолжался и продолжается, но сказанного достаточно, чтобы сформулировать основной стимул ее развития и предъявляемые к ней требования. Стимул развития – это стремление описать все, что требуется и удается, а требования – это замкнутость действий и операций, их принципиальная выполнимость. Замкнутость – это существенная особенность именно математического языка.

Эти принципы построения операционной системы – возможно более широкое описание на основе натуральных чисел и действий с ними, и требование замкнутости вновь изобретенных операций – в некоторой мере дают ответ на недоуменный вопрос А. Эйнштейна: «Как это может быть, что математика, являясь после всего продуктом мышления людей, не зависимым от опыта, так замечательно приспособлена к объектам действительности?».

Сказанным содержание математической операционной системы не ограничивается: еще есть множества, действия и соотношения между ними. Действия – это объединение, пересечение и дополнение. Соотношения – это принадлежность и непринадлежность, включение и невключение. Отношения больше и меньше имеются для действительных чисел и модулей чисел, функций и операторов. Конечно, для всех них имеются отношения равенства и тождественности.

Множества и действия с ними можно присоединить к описанной ранее операционной системе, а можно считать еще одной математической операционной системой. Некоторое разделение все же желательно, так как позволяет обнаружить особенности каждой из них. Эти особенности и существенные различия есть даже среди изоморфных операционных систем, не различимых с точки зрения предшествующего их описания.

Две операционные системы $A$ и $B$ изоморфны, если между их элементами и действиями возможно установление взаимно однозначных соответствий $T$ и соответственно $D$ таких, что для любого элемента (элементов) $x \in A$ и допустимого действия $f \in A$ имеет место диаграмма коммутативности, где $y = f\,x$, $\eta = g\xi$, $Tx = \xi$, $Ty = \eta$, $Df = g$.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "T"] & & y \arrow[dd, "T"'] \\
& {} \arrow[d, "D"] & \\
\xi \arrow[rr] & g & \eta
\end{tikzcd}
$$

Изоморфные системы в силу этой диаграммы коммутативности, казалось бы, отличаются друг от друга только обозначениями. Но на самом деле это не так, потому что в предыдущем изложении не учитывалось, как осуществляются действия. А это, оказывается, очень важно. Действия можно задать неким абстрактным соответствием в виде таблицы умножения, но это реально осуществимо только для конечных чисел элементов, а их бесконечно много. Так что должна быть какая-то, возможно более простая, процедура реализации этого абстрактного соответствия.

Поясним сказанное на примере римской и арабской записей одних и тех же целых чисел. Так, числа 156 и 267 в римской записи – это CLVI и соответственно CCLXVII. Перемножить числа 156 и 267 может школьник младших классов, а перемножить числа в римской записи, CLVI и CCLXVII, очень трудно и практически невозможно, если числа четырехзначные. Греки этому обучались в течение многих лет.

Сказанное относится не только к операции умножения двух чисел, еще более ярко это видно на операциях дифференцирования и интегрирования. Даже для элементарных функций интегрирование не всегда выполнимо. Но эти операции можно сделать очень простыми и всегда легко выполнимыми в операционной системе, придуманной Хевисайдом. Продифференцировать или проинтегрировать функцию $f(t)$ в ней очень просто, и результаты, соответственно, $pF(p) - f(0)$ и $F(p)/p$, где $F(p)$ – запись функции $f(t)$ в системе Хевисайда, $p$ – комплексное число.

Операционная система Хевисайда изоморфна нашей привычной, и этот изоморфизм устанавливается известным преобразованием Лапласа. Правда, в ней плохо с умножением: оно выполнимо очень сложно, а в привычной для нас системе – просто.

Осталось еще добавить, что операционных систем типа Хевисайда довольно много. Совсем другая изоморфная операционная система, в которой почти все действия, правда, приближенно, легко и быстро выполнимы, – это операционная система современной ЭВМ с хорошим математическим обеспечением, памятью и быстродействием.

Зачем же нам нужны другие изоморфные операционные системы, отличные от привычной общематематической? Ответ можно сформулировать так. В ряде случаев решить некоторую задачу в обычной математической операционной системе не удается, но если перевести ее в другую, ей изоморфную, то там решение найти можно. Решив задачу в изоморфной системе, можно вернуться в исходную систему и получить требуемое решение. Эта возможность – прямое следствие диаграммы коммутативности. Действительно, допустим, действие $f$ над элементом $x$ невыполнимо в операционной системе *A*, но оно выполнимо в операционной системе *B*. Согласно диаграмме коммутативности, действию $f$ в изоморфной системе отвечает действие *g*, и, как непосредственно видно из этой диаграммы,

$$y = fx = T^{-1}\eta = T^{-1}g\xi = T^{-1}gTx\,,$$

где все операции *T*, $g$ и $T^{-1}$ выполнимы, причем операция *T* соответствует переходу от исходной системы *A* к используемой *B*, а операция $T^{-1}$ – возврату в исходную систему *A*.

На этом краткое описание математических операционных систем закончим и перейдем к аналогам фраз, описаний, рассказов и т.п. в математическом языке. Этот аналог уже был указан – это математические модели, т.е. изоморфные отображения описаний каких-то реальных или мыслимых объектов с помощью математической операционной системы. Чтобы прояснить сказанное, определим математическую модель абстрактно и формально, как некоторое множество элементов математической операционной системы и связей, устанавливаемых ее действиями и отношениями. В соответствии с этим определением, уравнение $x^2 + px + q = 0$ – модель, соотношение $y = ax + b$ – тоже модель, $x$ – тоже модель. Модель и $dx/dt = z + x$, модель и $x < y$. Но понятие модели имеет и содержательный смысл. Чтобы выяснить, в чем он состоит, заметим, что понятие изоморфизма имеет место и для моделей.

Две модели изоморфны, если между их элементами, действиями и отношениями между ними можно установить взаимнооднозначное соответствие, для которого справедлива диаграмма коммутативности. Речь может идти о моделях в одной и той же операционной системе или разных.

Теперь осталось сказать о математической модели и математическом моделировании самое главное, но, к сожалению не формализуемое: природа, как окружающий нас мир, – тоже операционная система, так как ее удается с той или иной полнотой представить в виде разнообразных элементов и связей между ними и текущим временем, называемых законами природы и принципами ее устройства. С этой точки зрения объекты природы – это ее природные модели, и они могут быть изоморфны математическим моделям. Вернее, человечество создало математический язык так, чтобы это имело место. И как только удается построить изоморфную объекту природы математическую модель, изучая ее, мы постигаем и природный объект. Неформальным в описанном является выделение в объектах природы элементов, подчас выдумываемых и изобретаемых, и установление связей между ними и текущим временем, т.е. неформально то, как мы постигаем устройство мира и операционную систему природы и как мы постигаем изоморфную ей математическую операционную систему, модели которой могут быть изучены, исследованы и поняты. Поэтому наука в целом и математическое моделирование как часть ее – это не только точная наука, но и неформализуемое искусство. В истории науки и отдельных исследованиях формализуемое и неформализуемое, точная наука и искусство тесно переплетаются между собой и трудно отделимы друг от друга. Но это разделение, например, было очень явным и четким, когда М. Фарадей постиг электромагнитные явления, выдумав магнитные и электрические поля, а Дж.К. Максвелл построил соответствующую математическую модель – знаменитые уравнения Максвелла. В механике были придуманы силы и материальные точки, обладающие массой и находящиеся в каких-то местах, и имеющие скорость движения, Ньютон построил математическую модель их движения – уравнения Ньютона, затем Лагранж – уравнения Лагранжа для систем материальных точек с голономными идеальными связями между ними, но без необходимости знания вызываемых ими сил.

По-видимому, в основе не только нашего осознанного мышления, но и неосознанного постижения мира нашими органами чувств и мозгом лежит построение изоморфных моделей. Как устроены эти модели, как они строятся и познаются – одна из важнейших и не раскрытых тайн природы. С помощью этого интуитивного мышления человек осознанно придумывает еще более мощные, сознательно обоснованные математические модели и необходимую для их построения и исследования операционную систему.